

INF280

Stratégies de recherche

Antoine Amarilli

- **Stratégies classiques** pour résoudre les problèmes
 - Se **demander** si l'une de ces stratégies peut marcher
- Réfléchir aussi au **nombre d'opérations** :
- Environ 10^8 – 10^9 opérations par seconde
 - Exemple : Pour $n \simeq 10^4$ un algorithme en $O(n^2)$ passera...
 - ... pour $n \simeq 10^6$ il ne passera pas, il faut $O(n)$ ou $O(n \log n)$

Table des matières

Force brute (*Bruteforce*)

Retour sur trace (*Backtracking*)

Mémoïsation (*Memoization*)

Dynamique (*Dynamic programming*)

Glouton (*Greedy algorithm*)

Dichotomie (*Binary search*)

Conclusion

- **Énumérer** toutes les solutions possibles
- **Vérifier** en bloc si elles sont bonnes
- Attention à la **performance**!
 - **Nombre** de solutions
 - **Coût** de la vérification

Énumérer les permutations

```
int p[MAXN];  
for (int i = 0; i < N; i++)  
    p[i] = i;  
do {  
    // tester la permutation p  
    // ...  
} while (next_permutation(p, p+N));
```

Énumérer les sous-ensembles (N petit)

```
for (int s = 0; s < (1 << N); s++) {  
    // s en binaire est un sous-ensemble de {0, ..., N-1}  
    // (s & (1 << i)) pour savoir si i est dans l'ensemble  
    // ...  
}
```

Table des matières

Force brute (*Bruteforce*)

Retour sur trace (*Backtracking*)

Mémoïsation (*Memoization*)

Dynamique (*Dynamic programming*)

Glouton (*Greedy algorithm*)

Dichotomie (*Binary search*)

Conclusion

- **Ordre** sur les choix
 - **Énumérer** les options possibles
 - Pour chacune, la **faire** et tenter de continuer
 - Si coincé, **revenir en arrière** (*backtrack*)
- Permet de vérifier **incrémentalement** les solutions
- Permet de rejeter les **solutions partielles**

Sudoku

	2		5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2		5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5		2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	4	3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	4	3	1		6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	4	3	1	??	6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	4	3	1		6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	4	3	??		6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	4	3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1		6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
1	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
1	3	9		6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
1	3	9	4	6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
1	3	9	4	6	8		7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
1	3	9	4	6	8	2	7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
1	3	9	4	6	8	2	7	5
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Sudoku

4	2	6	5	7	1	3	9	8
8	5	7	2	9	3	1	4	6
1	3	9	4	6	8	2	7	5
9	7	1	3	8	5	6	2	4
5	4	3	7	2	6	8	1	9
6	8	2	1	4	9	7	5	3
7	9	4	6	3	2	5	8	1
2	6	5	8	1	4	9	3	7
3	1	8	9	5	7	4	6	2

Implémentation

- Souvent commode en **récuratif** avec une **structure globale**
- Appel de fonction sur un **choix** : considérer chaque **option** :
 - Modifier la structure pour prendre l'**option**
 - Faire un appel récuratif sur le **choix suivant**
 - En cas de réussite, **réussir** : laisse intacte la **solution complète**
 - Sinon, **annuler** la modification
- Attention à la taille de **pile** (quelques mégaoctets ou moins...)
 - Si la récursion est trop profonde, gérer **manuellement** la pile

Exemple : sudoku

```
int g[9][9];
bool solve(int i) {
    int x = i/9, y = i%9;
    if (x >= 9) return true;
    if (g[x][y] != 0)
        return solve(i+1);
    for (int k = 1; k <= 9; k++)
        if (acceptable(x, y, k)) {
            g[x][y] = k;
            if (solve(i+1))
                return true;
            g[x][y] = 0;
        }
    return false;
}
```

Table des matières

Force brute (*Bruteforce*)

Retour sur trace (*Backtracking*)

Mémoïsation (*Memoization*)

Dynamique (*Dynamic programming*)

Glouton (*Greedy algorithm*)

Dichotomie (*Binary search*)

Conclusion

- Rendre un algorithme **récurif** plus efficace
- Factoriser les **calculs déjà effectués**

Exemple : Fibonacci

```
int fib(int i) {  
    if (i == 0)  
        return 0;  
    if (i == 1)  
        return 1;  
    return fib(i-1) + fib(i-2);  
}
```

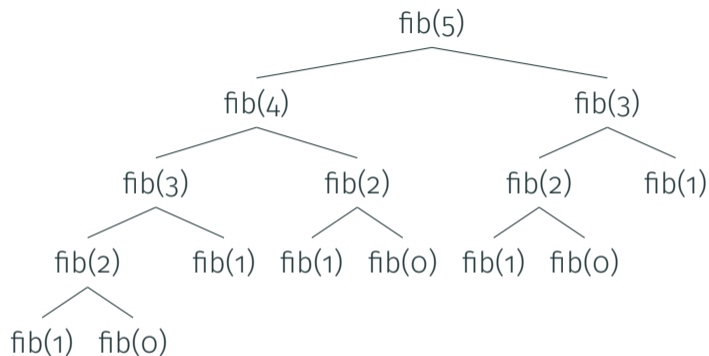
Exemple : Fibonacci

```
int fib(int i) {  
    if (i == 0)  
        return 0;  
    if (i == 1)  
        return 1;  
    return fib(i-1) + fib(i-2);  
}
```

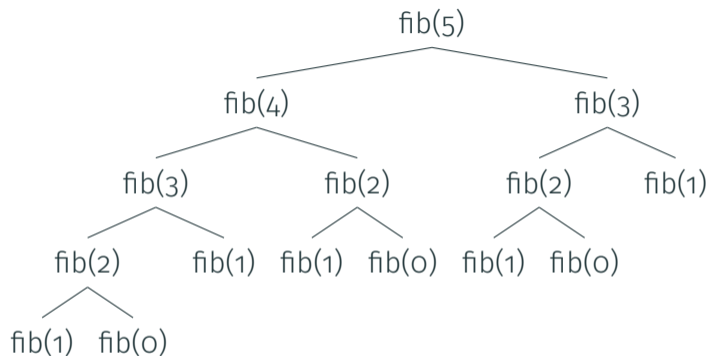
Mauvaises **performances** :

```
$ time ./a.out 42  
./a.out 42  4.72s user 0.02s system 99% cpu 4.757 total
```

Inefficacité

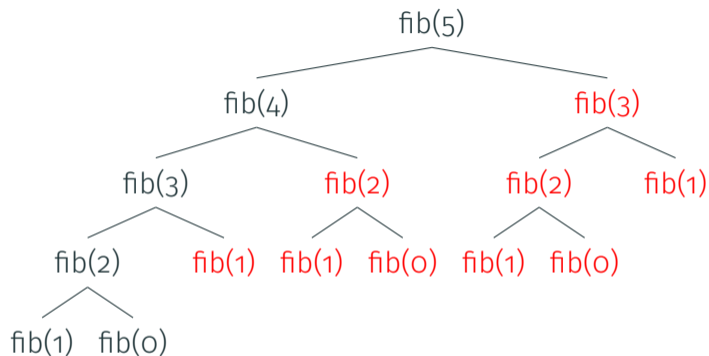


Inefficacité



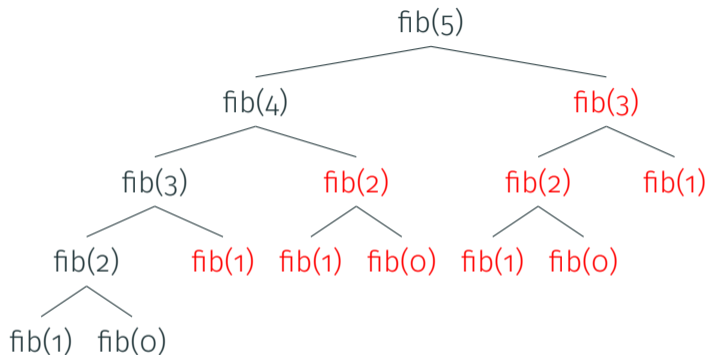
→ **Exponentiel...** peut-on faire mieux?

Inefficacité



→ **Exponentiel...** peut-on faire mieux?

Inefficacité



→ **Exponentiel...** peut-on faire mieux?

→ Bien sûr, il y a de **meilleures solutions** pour Fibonacci

- Itératif (voir plus loin)
- Forme close, **exponentiation rapide**

Fibonacci en version mémorisée

```
int M[100];

int fib(int i) {
    if (i == 0)
        return 0;
    if (i == 1)
        return 1;
    if (M[i])
        return M[i];
    return M[i] = fib(i-1) + fib(i-2);
}
```

Fibonacci en version mémorisée

```
int M[100];

int fib(int i) {
    if (i == 0)
        return 0;
    if (i == 1)
        return 1;
    if (M[i])
        return M[i];
    return M[i] = fib(i-1) + fib(i-2);
}
```

Mieux!

```
$ time ./a.out 42
```

- Choisir la bonne **valeur non initialisée** (ici, 0)
- Penser à **remettre à cette valeur** entre les inputs s'il le faut
- Ne pas oublier les **cas de base**
- Ne pas oublier d'**écrire dans le tableau**
- Choisir les bonnes **dimensions maximales**
- Si les valeurs ne sont **pas denses**, utiliser un `(unordered)_map`
- Attention à la **pile**! (récursion non terminale)
- Il ne faut pas d'**état**! (peut-on mémoriser le sudoku?)

Autre exemple : distance d'édition de Levenshtein

- **Distance** pour passer d'une chaîne à l'autre
 - **Opérations** :
 - **Insertion** : chat → chant
 - **Délétion** : cochon → cocon
 - **Substitution** : poule → poupe
- Combien d'opérations successives nécessaires au **minimum** ?

Idée pour Levenshtein

- Pour passer d'une chaîne non vide s à une chaîne non vide t ...
 - Soit les deux derniers caractères sont les mêmes : **retirer**
 - Soit le dernier caractère de t a été **inséré**
 - Soit le dernier caractère de t est le résultat d'une **substitution** sur le dernier caractère de s
 - Soit le dernier caractère de t est un caractère précédent de s et le dernier caractère de s a été **supprimé**

Idée pour Levenshtein

- Pour passer d'une chaîne non vide s à une chaîne non vide t ...
 - Soit les deux derniers caractères sont les mêmes : **retirer**
 - Soit le dernier caractère de t a été **inséré**
 - Soit le dernier caractère de t est le résultat d'une **substitution** sur le dernier caractère de s
 - Soit le dernier caractère de t est un caractère précédent de s et le dernier caractère de s a été **supprimé**
- $D(i, j)$: distance du **préfixe** $s[0 \dots i]$ au **préfixe** $t[0 \dots j]$
- $D(i, j)$ est le **minimum** de :
 - $1 + D(i, j - 1)$: **insertion**
 - $1 + D(i - 1, j)$: **délétion**
 - $D(i - 1, j - 1) + 1$ si $s[i] \neq s[j]$ et 0 sinon : **substitution**
- **Cas de base** : $D(0, j) = j$ et $D(i, 0) = i$

Exemple pour Levenshtein

		n	i	c	h	e	s
c							
h							
i							
e							
n							

Exemple pour Levenshtein

		n	i	c	h	e	s
	0 ●	1 ←	2 ←	3 ←	4 ←	5 ←	6 ←
c							
h							
i							
e							
n							

Exemple pour Levenshtein

		n	i	c	h	e	s
	0 ●	1 ←	2 ←	3 ←	4 ←	5 ←	6 ←
c	1 ↑	1 ↖	2 ↖	2 ↖	3 ←	4 ←	5 ←
h	2 ↑	2 ↖	2 ↖	3 ↖	2 ↖	3 ←	4 ←
i	3 ↑	3 ↖	2 ↖	3 ↖	3 ↑	3 ↖	4 ↖
e	4 ↑	4 ↖	3 ↑	3 ↖	4 ↖	3 ↖	4 ↖
n	5 ↑	4 ↑	4 ↑	4 ↑	4 ↖	4 ↑	4 ↖

Exemple pour Levenshtein

		n	i	c	h	e	s
	0 ●	1 ←	2 ←	3 ←	4 ←	5 ←	6 ←
c	1 ↑	1 ↖	2 ↖	2 ↖	3 ←	4 ←	5 ←
h	2 ↑	2 ↖	2 ↖	3 ↖	2 ↖	3 ←	4 ←
i	3 ↑	3 ↖	2 ↖	3 ↖	3 ↑	3 ↖	4 ↖
e	4 ↑	4 ↖	3 ↑	3 ↖	4 ↖	3 ↖	4 ↖
n	5 ↑	4 ↑	4 ↑	4 ↑	4 ↖	4 ↑	4 ↖

Exemple pour Levenshtein

		n	i	c	h	e	s
	0 ●	1 ←	2 ←	3 ←	4 ←	5 ←	6 ←
c	1 ↑	1 ↖	2 ↖	2 ↙	3 ←	4 ←	5 ←
h	2 ↑	2 ↖	2 ↖	3 ↖	2 ↙	3 ←	4 ←
i	3 ↑	3 ↖	2 ↖	3 ↖	3 ↑	3 ↖	4 ↖
e	4 ↑	4 ↖	3 ↑	3 ↖	4 ↖	3 ↙	4 ↖
n	5 ↑	4 ↑	4 ↑	4 ↑	4 ↖	4 ↑	4 ↙

n i c h e s
 | | | |
 c h i e n

Implémentation de Levenshtein

```
int M[100][100]; char *s, *t; // M[i][j] initialized to -1 for all i, j
```

```
int dist(int i, int j) {  
    if (!i)  
        return j;  
    if (!j)  
        return i;  
    if (M[i][j] >= 0)  
        return M[i][j];  
    return M[i][j] = min(  
        dist(i-1, j-1) + ((s[i-1] == t[j-1]) ? 0 : 1),  
        min(1 + dist(i, j-1),  
            1 + dist(i-1, j)));  
}
```

Table des matières

Force brute (*Bruteforce*)

Retour sur trace (*Backtracking*)

Mémoïsation (*Memoization*)

Dynamique (*Dynamic programming*)

Glouton (*Greedy algorithm*)

Dichotomie (*Binary search*)

Conclusion

- **Mémoïsation** : traiter chaque sous-problème utile **une seule fois** à partir des plus gros
- **Dynamique** : traiter **tous** les sous-problèmes (même inutiles) des plus petits aux plus grands
- **Avantages des dynamiques** :
 - Souvent plus **efficaces** (pas de récursion), pas de **taille de pile**
 - Plus facile de réduire la **mémoire** en ne gardant pas tout
 - Parfois plus naturel de **voir le calcul**
- **Inconvénients** :
 - Calcule même les sous-problèmes **inutiles**
 - Plus difficiles à adapter à partir d'un **retour sur trace**

Exemple : Fibonacci

```
int T[100];
```

```
int fib(int n) {
```

```
    T[0] = 0;
```

```
    T[1] = 1;
```

```
    for (int i = 2; i <= n; i++)
```

```
        T[i] = T[i-1] + T[i-2];
```

```
    return T[n];
```

```
}
```

Exemple : Fibonacci

```
int T[100];
```

```
int fib(int n) {  
    T[0] = 0;  
    T[1] = 1;  
    for (int i = 2; i <= n; i++)  
        T[i] = T[i-1] + T[i-2];  
    return T[n];  
}
```

- Bien sûr, c'est **idiot!**
- Inutile de tout **garder en mémoire**

Exemple : Fibonacci (amélioré)

```
int T[2];

int fib(int n) {
    T[0] = 0;
    T[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= n; i++)
        T[i%2] = T[(i-1)%2] + T[(i-2)%2];
    return T[n%2];
}
```

Exemple : Fibonacci (amélioré)

```
int T[2];

int fib(int n) {
    T[0] = 0;
    T[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= n; i++)
        T[i%2] = T[(i-1)%2] + T[(i-2)%2];
    return T[n%2];
}
```

- Mieux qu'un **récurusif mémoisé**!

Exemple : Levenshtein

```
int M[100][100]; char *s, *t;

int dist(int ni, int nj) {
    for (int j = 0; j <= nj; j++)
        M[0][j] = j;
    for (int i = 1; i <= ni; i++) {
        M[i][0] = i;
        for (int j = 1; j <= nj; j++)
            M[i][j] = min(min(1 + M[i][j-1], 1 + M[i-1][j]),
                M[i-1][j-1] + ((s[i-1] == t[j-1]) ? 0 : 1));
    }
    return M[ni][nj];
}
```

Exemple : Levenshtein

```
int M[100][100]; char *s, *t;
```

```
int dist(int ni, int nj) {  
    for (int j = 0; j <= nj; j++)  
        M[0][j] = j;  
    for (int i = 1; i <= ni; i++) {  
        M[i][0] = i;  
        for (int j = 1; j <= nj; j++)  
            M[i][j] = min(min(1 + M[i][j-1], 1 + M[i-1][j]),  
                M[i-1][j-1] + ((s[i-1] == t[j-1]) ? 0 : 1));  
    }  
    return M[ni][nj];  
}
```

- On peut à nouveau faire **mieux**

Exemple : Levenshtein (amélioré)

```
int M[2][100]; char *s, *t;

int dist(int ni, int nj) {
    for (int j = 0; j <= nj; j++)
        M[0][j] = j;
    for (int i = 1; i <= ni; i++) {
        M[i%2][0] = i;
        for (int j = 1; j <= nj; j++)
            M[i%2][j] = min(min(1 + M[i%2][j-1], 1 + M[(i-1)%2][j]),
                M[(i-1)%2][j-1] + ((s[i-1] == t[j-1]) ? 0 : 1));
    }
    return M[ni%2][nj];
}
```

Table des matières

Force brute (*Bruteforce*)

Retour sur trace (*Backtracking*)

Mémoïsation (*Memoization*)

Dynamique (*Dynamic programming*)

Glouton (*Greedy algorithm*)

Dichotomie (*Binary search*)

Conclusion

- Algorithme **glouton** : faire le choix localement meilleur
- Ne jamais **revenir** sur ses choix

Exemple de glouton : bicolorier un graphe

Entrée Graphe non-orienté G

Hypothèse G est connexe

Sortie Déterminer si G est biparti ?

Exemple de glouton : bicolorier un graphe

Entrée Graphe non-orienté G

Hypothèse G est connexe

Sortie Déterminer si G est biparti ?

→ **Intuition** : si G est biparti, alors bipartition unique

- ... excepté la symétrie entre les parties 1 et 2

Exemple de glouton : code

```
bool color(int v, int c) {
    if (col[v])
        return (col[v] == c);
    col[v] = c;
    for (unsigned int i = 0; i < adj[v].size(); i++)
        if (!color(adj[v][i], -c))
            return false;
    return true;
}
```

```
for (int i = 0; i < N; i++)
    col[i] = 0;
color(0, 1);
```

- Importance de l'**ordre des choix**
- Parfois, glouton seulement possible pour le bon **ordre**
- Souvent, il faut **trier** pour avoir le bon ordre
- **Se demander** : le glouton suivant tel tri est-il optimal ?

Exemple de glouton et tri : choix d'activités

Entrée Activités avec date de début et de fin $d_i < f_i$

Sortie Sous-ensemble maximal sans chevauchement

Exemple de glouton et tri : choix d'activités

Entrée Activités avec date de début et de fin $d_i < f_i$

Sortie Sous-ensemble maximal sans chevauchement

→ **Intuition** : trier les activités par date de fin croissante

Exemple de glouton et tri : code

```
for (int i = 0; i < N; i++) {
    scanf("%d%d", &d, &f);
    v.push_back(make_pair(f, d));
}
sort(v.begin(), v.end());
int nok = 0, last = -1;
for (int i = 0; i < N; i++) {
    if (v[i].second < last)
        continue;
    nok++;
    last = v[i].first;
}
```


Exemple de glouton et tri : justification

- Considérons une solution **optimale**
 - Considérons le **tri** par date de fin croissante
 - Considérons la première activité **a** que l'optimale **ne prend pas**
 - On peut remplacer l'**activité suivante** de l'optimale par **a**
 - On obtient une solution
 - **aussi bonne** que l'optimale
 - qui **fait le choix glouton**
 - **Induction**, on répète le processus
- La solution gloutonne est une solution **optimale**

Exemple de glouton et tri : justification

- Considérons une solution **optimale**
 - Considérons le **tri** par date de fin croissante
 - Considérons la première activité **a** que l'optimale **ne prend pas**
 - On peut remplacer l'**activité suivante** de l'optimale par **a**
 - On obtient une solution
 - **aussi bonne** que l'optimale
 - qui **fait le choix glouton**
 - **Induction**, on répète le processus
- La solution gloutonne est une solution **optimale**

Généralisations à des **activités pondérées** :

https://en.wikipedia.org/wiki/Activity_selection_problem

Table des matières

Force brute (*Bruteforce*)

Retour sur trace (*Backtracking*)

Mémoïsation (*Memoization*)

Dynamique (*Dynamic programming*)

Glouton (*Greedy algorithm*)

Dichotomie (*Binary search*)

Conclusion

- **Dichotomie :**
 - recherche d'un **élément** dans un tableau trié
- **Généralisation :**
 - recherche d'une **frontière** entre deux régions
- Coût seulement **logarithmique** (contre-intuitif!)

Exemple de dichotomie : couverture de points

Entrée.

- points P sur un segment
- nombre K de points

Sortie. K points P' telle que la distance **maximale** d'un point de P à un point de P' soit **minimale**.

Exemple de dichotomie : couverture de points

Entrée.

- points P sur un segment
- nombre K de points

Sortie. K points P' telle que la distance **maximale** d'un point de P à un point de P' soit **minimale**.

→ **Idée** : dichotomiser sur la distance maximale

Exemple de dichotomie : suite

- Une distance maximale est soit **réalisable** soit **irréalisable**
 - **Monotonie** :
 - si d est **réalisable** alors tout $d' < d$ l'est aussi
 - si d est **irréalisable** alors tout $d' > d$ l'est aussi
 - une seule **frontière** entre réalisable et irréalisable
 - Pour une distance maximale D **fixée**, algorithme **glouton**
- **Dichotomie** puis **glouton**

Table des matières

Force brute (*Bruteforce*)

Retour sur trace (*Backtracking*)

Mémoïsation (*Memoization*)

Dynamique (*Dynamic programming*)

Glouton (*Greedy algorithm*)

Dichotomie (*Binary search*)

Conclusion

- Gardez à l'esprit ces **schémas classiques**
- Bien sûr, **combinaisons** :
 - **Force brute** sur un choix puis **glouton** sur les autres
 - **Dichotomie** sur un paramètre puis **glouton** avec le bon tri
 - etc.

- Transparent 9 : <http://tex.stackexchange.com/a/43234>