



Géométrie algorithmique

B. Meyer

Cours INF280, département INFRES





Contenu

Les objets simples

Les polygones

Algorithmes sophistiqués



En quelques mots

- ▶ Beaucoup de raisonnements mathématiques de collégiens, mais revus à la sauce algorithmique.
- ▶ Nombreux *risques d'erreurs* numériques :
 - Dans le doute, utiliser des double.
- ▶ Cas limites ou cas dégénérés pénibles :
 - ▶ droites parallèles au lieu de sécantes,
 - ▶ triangles plats,
 - ▶ cercles de rayon nul,
 - ▶ droites de pente ∞ ,
 - ▶ etc.

Quelques bonnes pratiques

- ▶ Ne jamais faire le test $a==b$ mais tester $fabs(a-b) < EPS$ où EPS est petit ($1e-9$ par exemple).
- ▶ Travailler avec des *entiers* aussi longtemps que possible.

Quelques exemples

- ▶ Utiliser $\|\mathbf{v}\|^2$ plutôt que $\|\mathbf{v}\|$ (ce qui évite $\sqrt{\cdot}$).
- ▶ Comparer les angles via leur cosinus s'il est plus facile à calculer.
- ▶ Utiliser une classe de pseudo-rationnels (par ex : couples $[num, denom]$ avec opérateurs $=$ et \leq).



Principe du balayage par une droite

Contexte : problème portant sur n points.

Paradigme de géométrie algorithmique fréquent
(intersection de segments, diagrammes de Voronoï, etc.).

- ▶ Solution **naïve** en $O(n^2)$:
Une action ou un test est effectué pour chaque couple de points.
- ▶ Solution par **balayage** en $O(n \ln n)$:
On imagine une droite qui balaye le plan. Action ou test effectué sur les couples de points ou événements rencontrés le long de la droite.

(Ex : UVa10613, UVa10691)



Contenu

Les objets simples

Les polygones

Algorithmes sophistiqués

Les points

- ▶ Méritent souvent une classe propre.
- ▶ Penser à surcharger les opérateurs == ou < (si besoin de tri).

Une structure de points

```
struct point {
    double x, y;
    point() {
        x=0.0; y=0.0;
    }
    point(double in_x, double in_y): x(in_x), y(in_y) {}
    bool operator == (point pt2) const {
        return (fabs(x - pt2.x) < EPS
                && (fabs(y - pt2.y) < EPS));
    }
};
```

Les vecteurs

Prévoir dans son code :

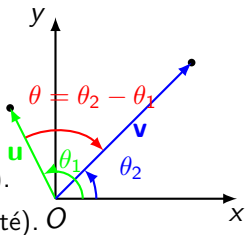
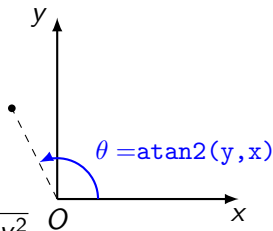
- ▶ structure ad hoc,
- ▶ fonction **produit scalaire** ($xx' + yy'$),
- ▶ fonction **produit vectoriel** ($xy' - x'y$).

Attributs :

- ▶ Norme : `hypot(x,y)` renvoie $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- ▶ Angle avec l'axe (Ox) :
 - ▶ Éviter `atan(y/x)` (danger : division par 0).
 - Utiliser `atan2(y,x)` (valeur dans $[-\pi, \pi]$).

Angle entre deux vecteurs **u** et **v** :

- ▶ Soustraire leur angle avec (Ox) (angle orienté).
- ▶ Calculer `arccos(u · v / (||u|| ||v||))` (angle non-orienté).



Les droites, les segments, les coniques, ...

Formes possibles de droites :

- ▶ équation cartésienne $ax + by + c = 0$,
- ▶ pente et ordonnée à l'origine $y = ax + b$ (sauf droite verticale),
- ▶ abscisse et ordonnée à l'origine $x/a + y/b = 1$,
- ▶ point & vecteur directeur,
- ▶ couple de points.

Coordonnées de l'**intersection** de deux droites sécantes

$D : ax + by + c$ et $D : a'x + b'y + c'$ (via les formules de Cramer) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad x = -\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{et} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Les droites sont **effectivement sécantes** ssi Δ est non-nul.

(Ex : UVa837, UVa10678)

Les coniques

Tranche d'un cône par un plan ou ensemble des points M tels que

$$\text{dist}(F, M) = e \cdot \text{dist}(F, \Delta)$$

où F est le **foyer**, Δ la **directrice** et e l'**excentricité**.

Équation polaire :

$$\rho = \text{cste} / (1 + e \cos \theta).$$

Cas $e = 0$: **cercle** de centre Ω et rayon R :

- ▶ équation $(x - x_\Omega)^2 / R^2 + (y - y_\Omega)^2 / R^2 = 1$
- ▶ paramétrisation $x(t) = R \cos(t)$, $y(t) = R \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi[$.
- ▶ périmètre $2\pi R$, aire πR^2

Cas $e = 1$: **parabole**

Les coniques

Cas $0 < e < 1$: **ellipse** de centre Ω , de foyers F et F' , demi-grand axe a , demi-petit axe b :

- ▶ équation $(x - x_\Omega)^2/a^2 + (y - y_\Omega)^2/b^2 = 1$
- ▶ paramétrisation $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = b \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi[$.
- ▶ points M tel que $\text{dist}(M, F) + \text{dist}(M, F') = \text{constante}$.
- ▶ aire πab

Cas $1 < e$: **hyperbole** de centre Ω , de foyers F et F' , demi-grand axe a , demi-petit axe b :

- ▶ équation $(x - x_\Omega)^2/a^2 - (y - y_\Omega)^2/b^2 = 1$
- ▶ paramétrisation $x(t) = a \cosh(t)$, $y(t) = b \sinh(t)$, $t \in [0, 2\pi[$.
- ▶ points M tel que $|\text{dist}(M, F) - \text{dist}(M, F')| = \text{constante}$.

Distances sur la sphère

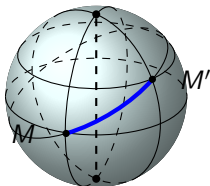
Distance orthodromique (ou distance du plus grand cercle) entre :

- ▶ premier point M de latitude δ et longitude λ ,
- ▶ second point M' de latitude δ' et longitude λ' ,

avec la formule suivante (*Haversine formula* en anglais) :

$$d = 2R \arcsin \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\delta' - \delta}{2} \right) + \cos \delta \cos \delta' \sin^2 \left(\frac{\lambda' - \lambda}{2} \right)}$$

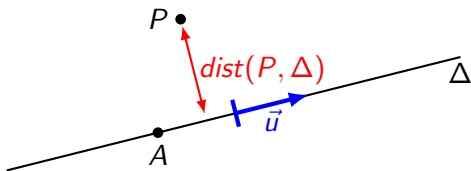
où R = rayon de la sphère.



Distance point – droite

- Distance entre le point P et la droite Δ passant par A dirigée par \vec{u} :

$$\text{dist}(P, \Delta) = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\| / \|\vec{u}\|.$$



(Ex : UVa10263)

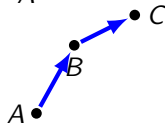
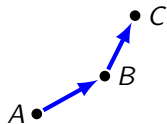
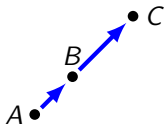
Alignements et virages

► Trois points A , B , C sont

1. colinéaires ssi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = 0$,

2. en virage à gauche ssi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} > 0$,

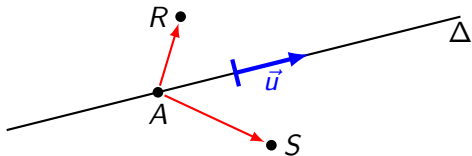
3. en virage à droite ssi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} < 0$.



Intersection de segments

- ▶ Un bipoint (R, S) est **de part et d'autre** de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur \vec{u} si

$$(\overrightarrow{AR} \times \vec{u}) \cdot (\overrightarrow{AS} \times \vec{u}) < 0.$$



- ▶ Deux segments $[AB]$ et $[RS]$ sont **strictement sécants** ssi le bipoint (A, B) est de part et d'autre de la droite (RS) et le bipoint (R, S) est de part et d'autre de la droite (AB) .

Pour calculer l'intersection, voir transparent 9.

(Ex : UVa191, UVa10902)



Contenu

Les objets simples

Les polygones

Algorithmes sophistiqués

Grandeurs du triangle

- ▶ **Longueur** des côtés (Al-Kashi) :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

- ▶ **Aire du triangle** ABC :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

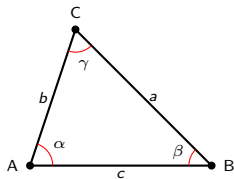
où $s = (a + b + c)/2$ (formule d'Héron).

- ▶ **Centre de gravité**, intersection des médianes :

$$G = \text{barycentre}((A, 1), (B, 1), (C, 1)).$$

- ▶ **Orthocentre**, intersection des hauteurs :

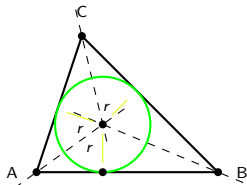
$$H = \text{barycentre}((A, \tan \alpha), (B, \tan \beta), (C, \tan \gamma)).$$



Cercles des triangles

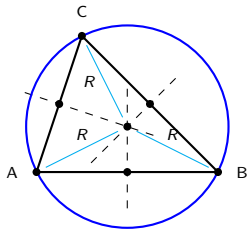
► Cercle inscrit :

- Centre I : intersection des bissectrices :
 $I = \text{barycentre}((A, a), (B, b), (C, c))$.
- Rayon $r = \frac{A}{s}$ où $A = \text{aire}$, $s = \text{demi-périmètre}$.



► Cercle circonscrit :

- Centre O : intersection des médiatrices :
 $O = \text{barycentre}((A, \tan \beta + \tan \gamma), (B, \tan \alpha + \tan \gamma), (C, \tan \alpha + \tan \beta))$.
- Rayon $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$.

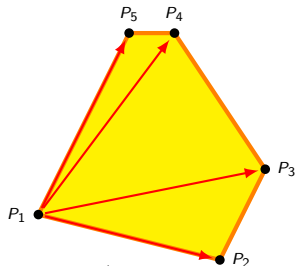


Aire d'un polygone

Polygone $\Pi = (P_1 P_2 \dots P_k)$:
 (même formule que le triangle)

$$A = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=2}^{k-1} \overrightarrow{P_1 P_i} \times \overrightarrow{P_1 P_{i+1}} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & - \\ x_2 & y_2 & + \\ \vdots & \vdots & + \\ x_n & y_n & + \\ x_1 & y_1 & + \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \right|$$



Valable que le polygone soit convexe ou non.

(Ex : UVa11265)

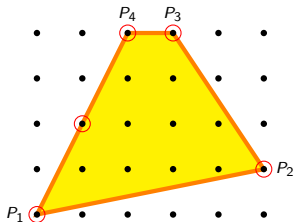
Formule de Pick

Théorème

Soit Π un polygone à sommets entiers, a son aire, b le nombre de points entiers sur sa frontière et i le nombre de points entiers dans son intérieur strict, alors

$$a = i + \frac{b}{2} - 1.$$

(Ex : UVa10088)

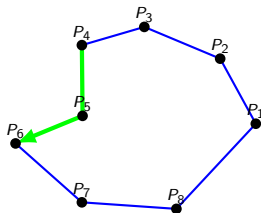
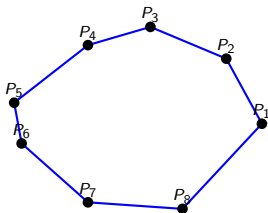


$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left\| \binom{5}{1} \times \binom{3}{4} + \binom{3}{4} \times \binom{2}{4} \right\| \\ &= 9 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

Convexité d'un polygone ?

Théorème

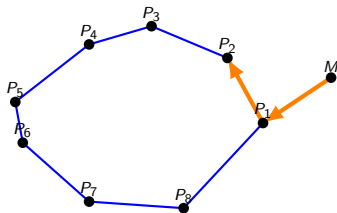
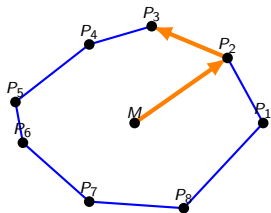
Pour qu'un polygone donné dans le sens trigonométrique $(P_1P_2 \dots P_n)$ soit convexe, il faut et il suffit que pour tout $1 \leq i \leq n$, $P_{i-1} \rightarrow P_i \rightarrow P_{i+1}$ soit un virage à gauche.



Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur du polygone convexe $(P_1P_2 \dots P_n)$ ssi, pour tout $1 \leq i \leq n$, $M \rightarrow P_i \rightarrow P_{i+1}$ est un virage à gauche.



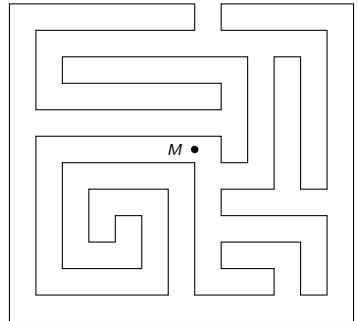
(Ex : UVa748, UVa10112)

Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur d'un polygone Π ssi une demi-droite issue de M intersecte les côtés de Π un nombre impair de fois.

Attention aux cas dégénérés : rencontre avec un sommet de Π ou inclusion d'une arête de Π .

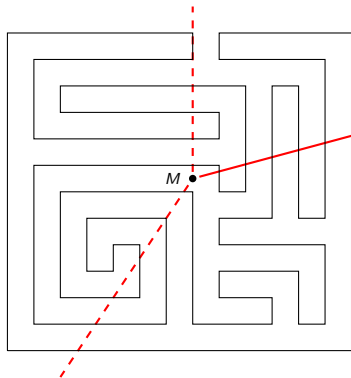


Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur d'un polygone Π ssi une demi-droite issue de M intersecte les côtés de Π un nombre impair de fois.

Attention aux cas dégénérés : rencontre avec un sommet de Π ou inclusion d'une arête de Π .

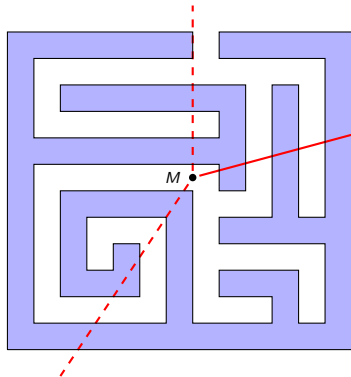


Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur d'un polygone Π ssi une demi-droite issue de M intersecte les côtés de Π un nombre impair de fois.

Attention aux cas dégénérés : rencontre avec un sommet de Π ou inclusion d'une arête de Π .





Contenu

Les objets simples

Les polygones

Algorithmes sophistiqués

Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

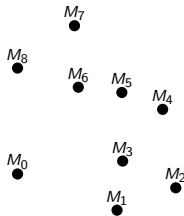
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

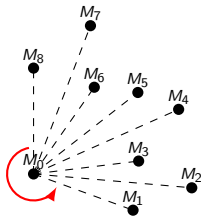
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

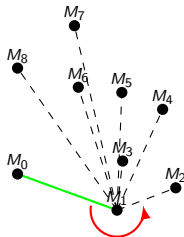
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

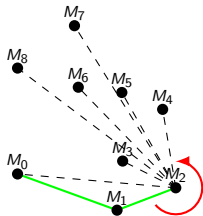
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

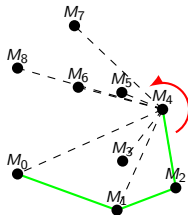
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

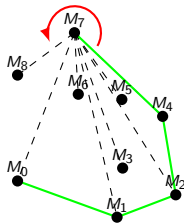
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

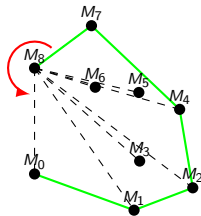
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(nh)$.

(Ex : UVa10652, UVa596)

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i \{M_i\}$ (ordre lexicographique).

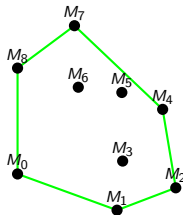
Pour $k \geq 0$,

$P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k .

Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

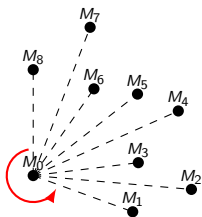
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

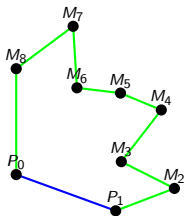
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

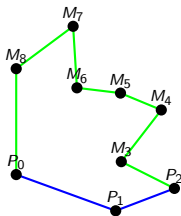
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

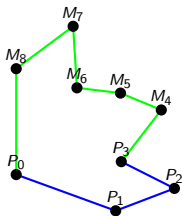
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

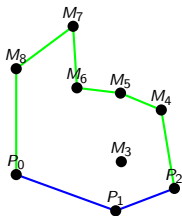
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

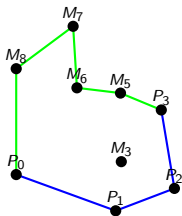
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

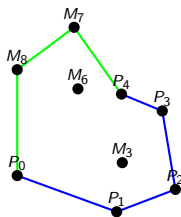
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

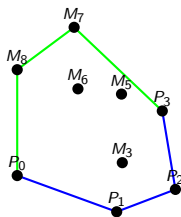
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

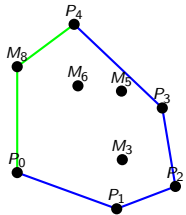
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

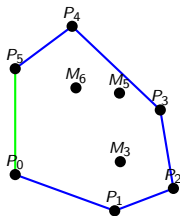
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i \{M_i\}$) (ordre lexicographique).

Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.

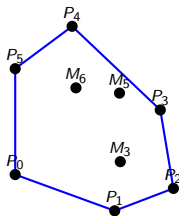
P.push(M_1).

Pour $i \leq n$,

Tant que $P_{-2} \rightarrow P_{-1} \rightarrow M_i$ en virage à droite,

P.pop().

P.push(M_i).



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

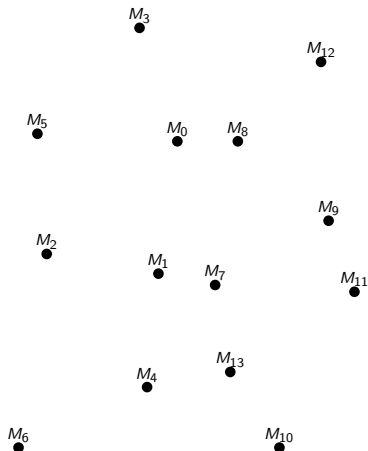
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

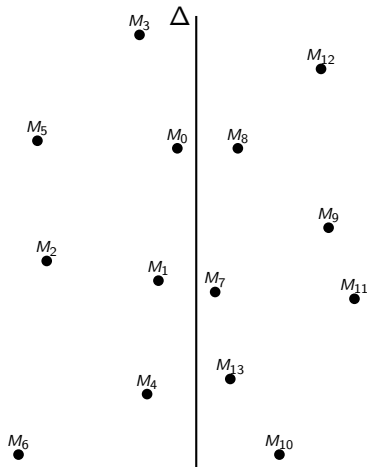
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

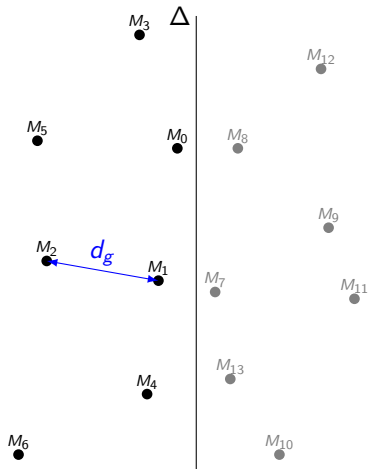
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

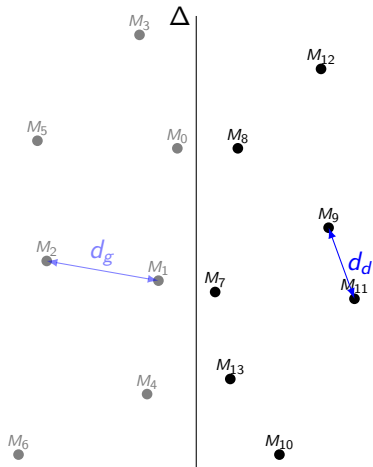
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

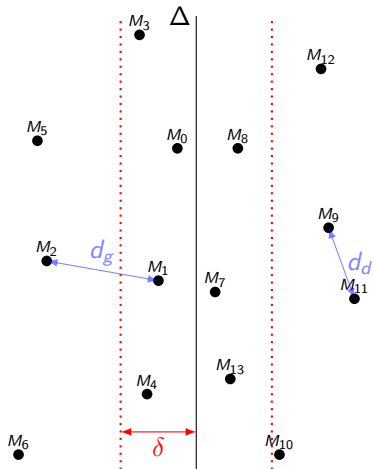
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

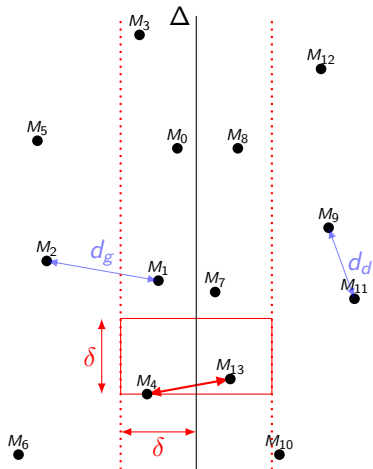
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

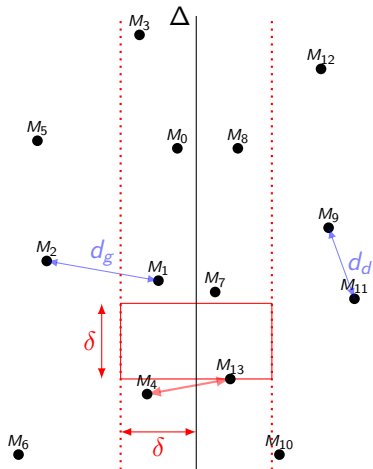
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

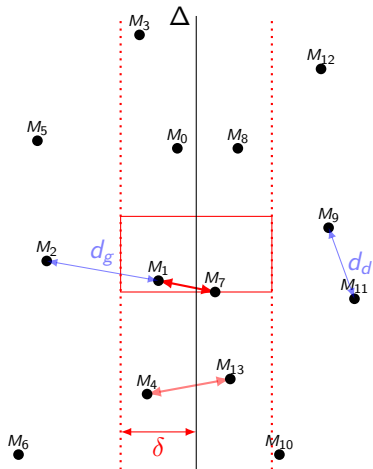
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

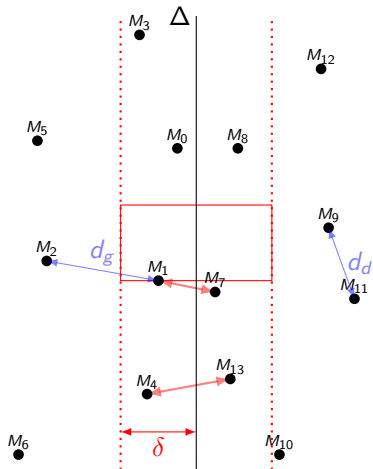
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

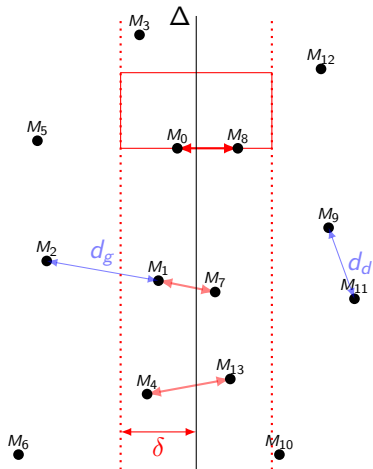
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

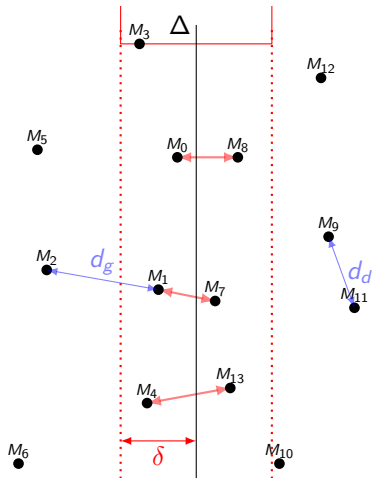
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.

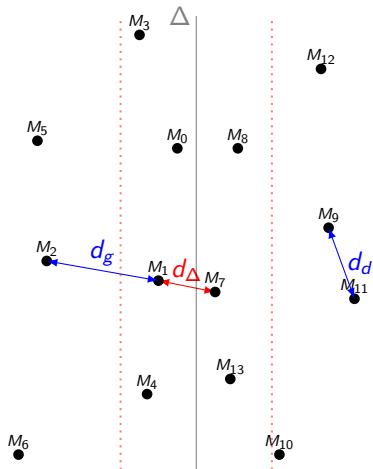
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.

Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- ▶ Classer les points par abscisse croissante.
Les scinder par la droite médiane Δ .
- ▶ Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d .
- ▶ Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ , chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- ▶ Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.





Crédits

- ▶ Transparents développés pour la préparation au concours à Hong Kong University 2010 :
<https://i.cs.hku.hk/~provinci/>
- ▶ Dessins sphériques :
<https://tex.stackexchange.com/questions/46850/>
- ▶ [Halim&Halim, *Competitive programming 3*] pour les pointeurs vers UVa