Jeux asynchrones 2
La véritable concurrence de l'innocence

Paul-André Melliès
Présentation: Antoine Amarilli

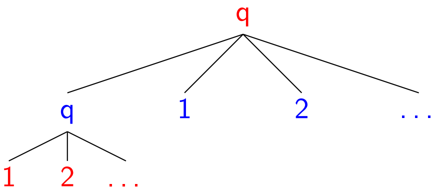
École Normale Supérieure

Sommaire

Idée de base

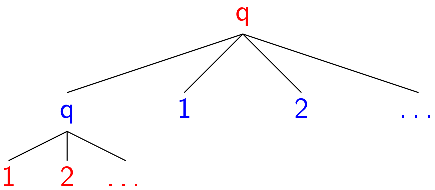
- On modélise l'évaluation de fonctions (lambda-termes) comme une séquence de questions-réponses entre deux joueurs (P et O).
- O demande la valeur de la fonction, P doit répondre.
- P peut demander à son tour la valeur des arguments de la fonction.

Exemple simple : $\boxed{\lambda x.x + 1}$



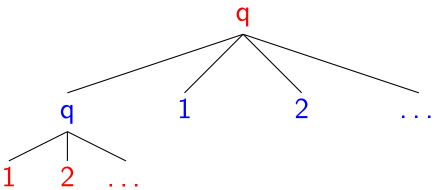
$$\mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{N}$$

Exemple simple : $\boxed{\lambda x.x + 1}$



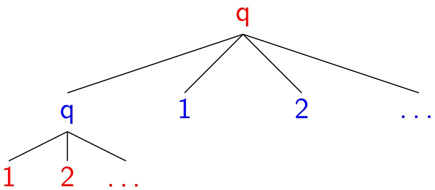
$\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
		q	O

Exemple simple : $\boxed{\lambda x.x + 1}$



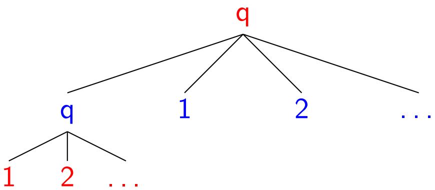
$\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
		q	O
q			P

Exemple simple : $\boxed{\lambda x.x + 1}$



$\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
		q	O
q			P
41			O

Exemple simple : $\boxed{\lambda x.x+1}$



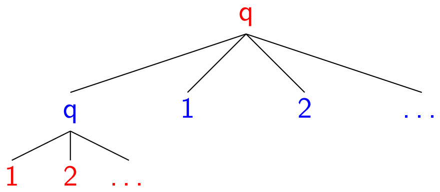
$\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
		q	O
q			P
41			O
		42	P

Plan

Nous allons établir la correspondance suivante :

Type	$\rightarrow$	Arène
Terme	$\rightarrow$	Stratégie
Évaluation	$\rightarrow$	Partie

Arène



- Une forêt d'arbres de coups, où un parent *justifie* ses fils.
- Les nœuds sont étiquetés pour indiquer :
  - si c'est O ou P qui y joue
  - si c'est une question ou une réponse

Partie

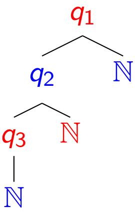
$\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
		q	O
q			P
41			O
		42	P

- Une suite de coups.
- On impose que chaque coup soit précédé par celui qui le justifie (pas nécessairement immédiatement).

Stratégie

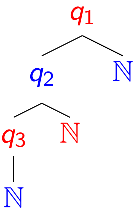
- Un ensemble σ de suites de coups.
- **Intuitivement :** $s\ a\ b \in \sigma$ nous dit qu'en jouant suivant σ, après avoir joué la partie s, si l'adversaire joue a, on joue b.
- Clôture par préfixe (si on sait comment jouer dans une situation, on joue de sorte à atteindre cette situation).
- Déterminisme : après s, si l'adversaire joue a, alors on joue *toujours le même coup* b.

Exemple plus complexe : $\boxed{\lambda f.f\ 42}$



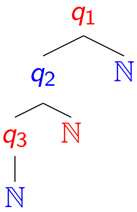
$$(\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}) \Rightarrow \mathbb{N}$$

Exemple plus complexe : $\boxed{\lambda f.f\ 42}$



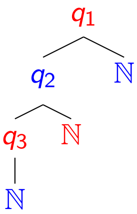
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O

Exemple plus complexe : $\boxed{\lambda f.f\ 42}$



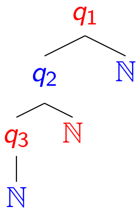
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P

Exemple plus complexe : $\boxed{\lambda f.f\ 42}$



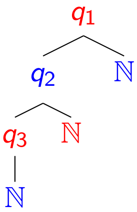
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O

Exemple plus complexe : $\boxed{\lambda f . f\ 42}$



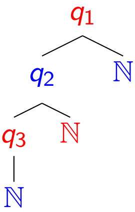
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
42					P

Exemple plus complexe : $\boxed{\lambda f . f\ 42}$



$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
42					P
		n			O

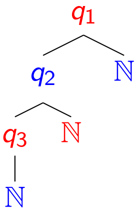
Exemple plus complexe : $\boxed{\lambda f . f\ 42}$



$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
42					P
		n			O
				n	P

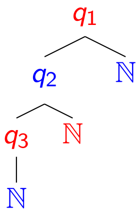
Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$

$$(\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}) \Rightarrow \mathbb{N}$$

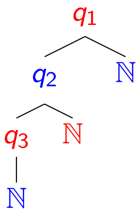


Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$

$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O

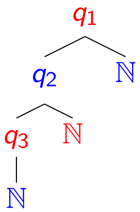


Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



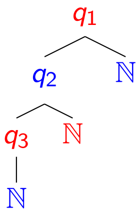
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



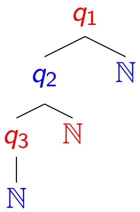
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



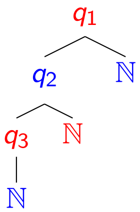
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
		q_2			P

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



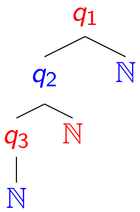
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
		q_2			P
q_3					O

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



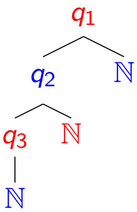
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
		q_2			P
q_3					O
42					P

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



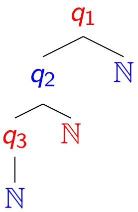
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
		q_2			P
q_3					O
42					P
		n			O

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f. f(f(42))}$



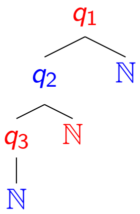
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
		q_2			P
q_3					O
42					P
		n			O
n					P

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



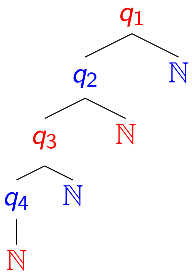
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
		q_2			P
q_3					O
42					P
		n			O
n					P
		m			O

Appels multiples et entrelacés : $\boxed{\lambda f.f(f(42))}$



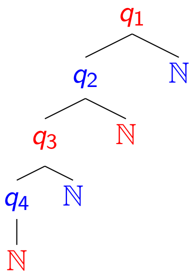
$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
		q_2			P
q_3					O
42					P
		n			O
n					P
		m			O
				m	P

Confusion : $\boxed{\lambda f.f(\lambda x.f(\lambda y.y))}$



$((\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
						q_1	O
				q_2			P
		q_3					O
				q_2			P
		q_3					O
q_4							P

Confusion : $\boxed{\lambda f.f(\lambda x.f(\lambda y.x))}$



$((\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
						q_1	O
				q_2			P
		q_3					O
				q_2			P
		q_3					O
q_4							P

Solutions

- Garder pour chaque coup un pointeur vers le coup qui le justifie.
- Numéroter les différentes instances de chaque coup avec un identifiant unique pour les désambigüer, puis considérer l'orbite sous une action de groupe qui renumérote les identifiants.

Sommaire

Conditions sur les stratégies

- On n'a pas imposé beaucoup de conditions pour l'instant, on sent bien qu'on a encore le droit de faire des choses étranges.
- On a déjà parlé de :

  Déterminisme. Dans une situation donnée, une stratégie fait toujours la même chose.
- On ne parlera pas de :

  Bracketing. La stratégie répond aux questions dans l'ordre (suivant une pile).
- En revanche, on va beaucoup parler de :

  Innocence. La stratégie fait toujours la même chose dans des situations où on dispose des mêmes informations. Autrement dit, le comportement de la stratégie ne dépend pas d'informations "invisibles" (portant par exemple sur la façon de répondre à une question intermédiaire résolue).

Influence de ces conditions

En fait, les conditions que l'on impose sur les parties changent l'expressivité du calcul :

Déterminisme. Interdit les programmes non-déterministes. (Duh.)

Bracketing. Interdit les ruptures du flot de contrôle du genre `call/cc`.

Innocence. Interdit de briser la transparence référentielle, donc interdit les effets de bord.

Un programme non-innocent

$$\boxed{\lambda f.\mathtt{let}\ x = \mathtt{ref}\ 0\ \mathtt{in}\ \mathtt{if}\ f(x := 1; \mathtt{return}\ 0)\ \mathtt{then}\ !x\ \mathtt{else}\ !x}$$

$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
q_3					O
0					P
		n			O
				1	P

$(\mathbb{N}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N})$	$\Rightarrow$	$\mathbb{N}$	
				q_1	O
		q_2			P
		n			O
				0	P

Définition formelle

On définit la *vue du joueur* $\lceil s \rceil$ d'une partie s par :

- $\lceil \epsilon \rceil = \epsilon$
- $\lceil s \cdot n \rceil = \lceil s \rceil \cdot n$ pour n un coup de P
- $\lceil s \cdot m \cdot t \cdot n \rceil = \lceil s \cdot m \rceil \cdot n$ pour n un coup de O justifié par m
  Intuitivement : Quand l'adversaire répond à une question, on ne sait pas comment il a fait.
- $\lceil s \cdot n \rceil = n$ pour n un coup *initial* de O
  Intuitivement : Quand l'adversaire pose une question initiale, on ne sait pas ce qu'il s'est passé avant.

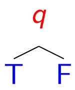
Stratégie innocente

- σ est innocente si pour toute partie $s \in \sigma$, pour tous coups m et n de O et P respectivement, si $s \cdot m \cdot n \in \sigma$, alors, pour toute partie $t \in \sigma$ telle que $t \cdot m$ soit une partie et $\lceil s \cdot m \rceil = \lceil t \cdot m \rceil$, on a également $t \cdot m \cdot n \in \sigma$.
  Intuitivement : Si la stratégie se comporte d'une certaine manière, alors elle se comporte de la même manière lorsqu'on a les mêmes informations visibles et que l'adversaire vient de jouer le même coup.
- Pour que tout ceci ait un sens, il faut imposer que le passage à la vue ne fasse pas disparaître de coup qui en justifie un autre plus loin. (Si c'est le cas, c'est déjà mauvais signe !).

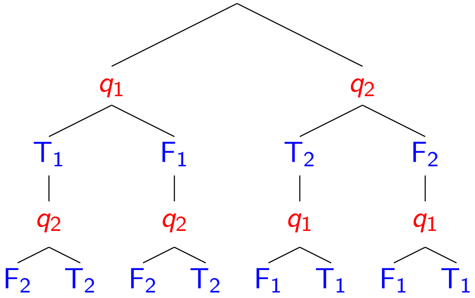
Sommaire

Problème

$\mathbb{B}$ l'arène des booléens



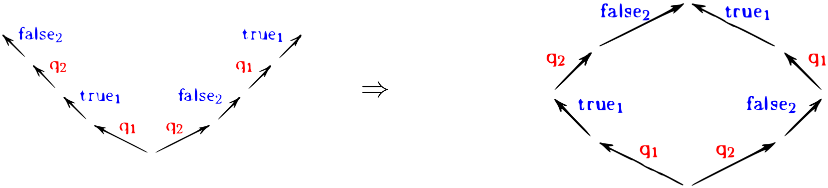
$\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ deux copies de l'arène des booléens



On aimerait bien ne pas se préoccuper de l'ordre !

Idée

On va représenter les parties de la façon suivante :



Conséquences

- L'arène n'est plus un arbre mais un graphe acyclique orienté.
- On va introduire des requêtes concurrentes (par exemple $q_1 \cdot q_2 \cdot \mathrm{true}_1 \cdot \mathrm{false}_2$).
- Un coup peut être justifié par plusieurs autres coups.

Coups

- L'ensemble des coups est ordonné.
- Chaque coup définit un ensemble fini d'éléments inférieurs (qui sont ses prédécesseurs dans le graphe, pas nécessairement immédiats).
- Chaque coup définit un ensemble fini de coups qui le justifient (qui sont ses prédécesseurs immédiats). Notation : $m \vdash n$.
- On étiquette les coups pour indiquer s'ils sont de O ou de P.

(Avant : les coups avaient un seul prédécesseur.)

Positions

- Une position est un ensemble fini de coups clos pour $\leq$.
  Intuitivement : Si on a joué un coup, ses prédécesseurs doivent aussi avoir été joués.
- L'ensemble des positions forme un treillis pour l'ordre partiel défini par l'inclusion. On ajoute un élément maximal (neutre pour l'intersection) et on obtient un treillis complet.
  (Treillis : tout couple d'éléments a un inf et un sup.)
  (Treillis complet : tout sous-ensemble d'éléments a un inf et un sup.)

(Avant : C'était une suite de coups, avec les conditions imposant que chaque coup soit précédé par un coup qui le justifie.)

Graphe ($\approx$ arène), parties

- On passe d'une position à une autre en ajoutant un coup qui n'est pas déjà présent dans la position.
- Une partie est un chemin dans le graphe qui part de la position vide.

(Avant : On passait d'une position à l'autre en rajoutant un coup à la fin, une partie était une suite de coups.)

Stratégies

- Une stratégie σ est un ensemble de parties tel que :
  - La partie vide est dans σ.
  - Les parties non-vides de σ sont alternantes (P et O jouent chacun leur tour) et commencent par un coup de O.
  - La stratégie est close par préfixe de taille paire.
- Une stratégie σ est déterministe si pour toute partie s et tout coup m, il y a au plus un coup n tel que $s \cdot m \cdot n \in \sigma$.

(Avant : C'était pareil.)

Sommaire

Vue

- On définit une relation de récriture :
  Pour toute partie s_1, pour tout chemin non-vide s_2, pour tous coups m de O qui ne justifie aucun coup de s_2, pour tout coup n de P :
  $s_1 \cdot m \cdot n \cdot s_2 \rightsquigarrow_{\mathrm{OP}} s_1 \cdot s_2$
- Ce système de récriture termine et est localement confluent, donc il est confluent (lemme de Newman). La *vue du joueur* $\lceil s \rceil$ d'une partie s est l'unique forme normale de s pour ce système.

(Avant : C'était moins général, et il restait ce problème désagréable de la visibilité qui disparaît totalement ici.)

Homotopie

- Homotopie : $m \cdot n \sim^1 n \cdot m$.
- Homotopie alternante (plus fort) : $m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \sim^1_{\mathrm{OP}} m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1$.
- $\sim$ est la plus petite relation contenant $\sim^1$ et close par composition : pour tous chemins s, s' de x_2 à x_3, si $s \sim s'$ alors pour tous s_1 de x_1 à x_2 et s_2 de x_3 à x_4, $s_1 \cdot s \cdot s_2 \sim s_1 \cdot s' \cdot s_2$.
- Idem pour $\sim_{\mathrm{OP}}$

Homotopie

- Homotopie : $m \cdot n \sim^1 n \cdot m$.
- Homotopie alternante (plus fort) :
  $m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \sim^1_{\mathrm{OP}} m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1$.
- $\sim$ est la plus petite relation contenant $\sim^1$ et close par composition : pour tous chemins s, s' de x_2 à x_3, si $s \sim s'$ alors pour tous s_1 de x_1 à x_2 et s_2 de x_3 à x_4, $s_1 \cdot s \cdot s_2 \sim s_1 \cdot s' \cdot s_2$.
- Idem pour $\sim_{\mathrm{OP}}$
- Note : en fait, la relation d'homotopie est triviale.

Stratégie innocente

- σ est innocente si pour toute partie $s \in \sigma$, pour tous coups m et n de O et P respectivement, si $s \cdot m \cdot n \in \sigma$, alors, pour toute partie $t \in \sigma$ telle que $t \cdot m$ soit une partie et $\lceil s \cdot m \rceil \sim_{\mathrm{OP}} \lceil t \cdot m \rceil$, on a également $t \cdot m \cdot n \in \sigma$.
- Avant : c'était pareil, au $\sim_{\mathrm{OP}}$ près.
- Dans le contexte de ce qu'on avait avant (les coups de O sont justifiés par au plus un coup, et c'est un coup de P), c'est effectivement la même chose.

Résultats

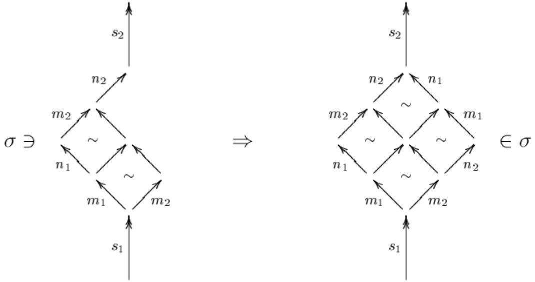
Cette définition de l'innocence nous permet d'obtenir plusieurs résultats :

Présentation diagrammatique. On peut caractériser les stratégies innocentes par le fait qu'elles respectent certaines contraintes diagrammatiques.

Caractère positionnel. On peut montrer que les stratégies innocentes sont positionnelles (ie. pour s_1, s_2 des chemins de la position vide à x dans la stratégie, pour tout chemin de x à y, si $s_1 \sim s_2$ et $s_1 \cdot t$ est dans la stratégie alors $s_2 \cdot t$ aussi).

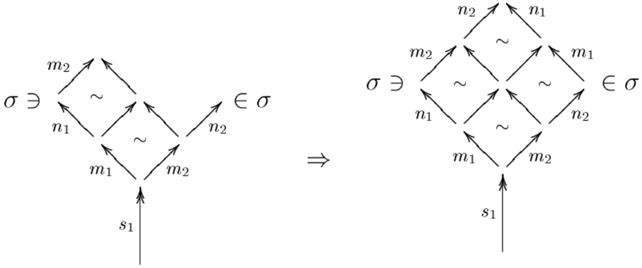
Présentation diagrammatique : consistance arrière

Pour tout $s_1 \in \sigma$, pour tout s_2, pour tous m_1, m_2, n_1, n_2, si $s_1 \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot s_2 \in \sigma$, et si $m_1 \not\vdash m_2$ et $n_1 \not\vdash n_2$ alors $s_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot s_2 \in \sigma$.



Présentation diagrammatique : consistance avant

Pour tout $s \in \sigma$, pour tous $m_1 \neq m_2, n_1, n_2$, si $s \cdot m_1 \cdot n_1 \in \sigma$ et $s \cdot m_2 \cdot n_2 \in \sigma$, alors $n_1 \neq n_2$ et $s \cdot m_1 \cdot n_1 \cdot m_2 \cdot n_2 \in \sigma$.



Sommaire

Objectif

On souhaiterait faire coïncider :

- la *stratégie innocente* associée à un terme par la sémantique des jeux définie jusqu'à présent
- la *sémantique des traces* au sens de la théorie de la concurrence, qui représente les interactions entre le terme et l'environnement au cours de l'évaluation
- les *branches d'arbres de Böhm η-longs* représentant les approximations courantes de la partie du lambda-terme en train d'être évaluée

On y parvient, mais pour une variante du lambda-calcul.

Variante

La variante du lambda-calcul étudiée est :

Non-uniforme. Pour l'application, on ne passe pas en argument des lambda-termes mais des vecteurs de lambda-termes (pas forcément finis), tous du même type. Les variables sont étiquetées par un index indiquant quel élément du vecteur elles récupèrent.

Affine. Les variables (avec leur étiquette) sont uniques.

Retour au lambda-calcul classique

- On se ramène au lambda-calcul classique en quotientant par les actions de groupe permettant de changer les indices associés aux variables
- C'est le même mécanisme que ce qu'on a mis en œuvre pour la gestion des pointeurs de justification dans la sémantique des jeux.

Références

- Paul-André Melliès, *Asynchronous games 2 : The true concurrency of innocence*.
- Samson Abramsky, Guy McCusker, *Game semantics*.
- Paul-André Melliès, Nicolas Tabareau, *Resource modalities in game semantics*.
- Olivier Laurent, *Sémantique des jeux* (notes de cours).

Merci !

- Merci pour votre attention !
- Questions ?