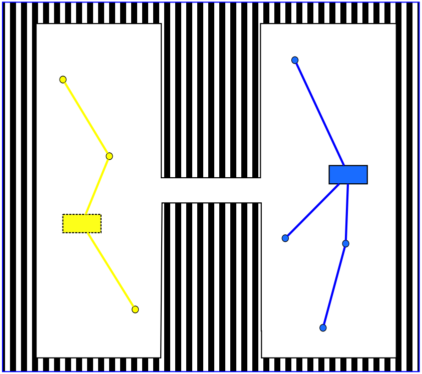
Preuves de déconnexion

Antoine Amarilli

École Normale Supérieure

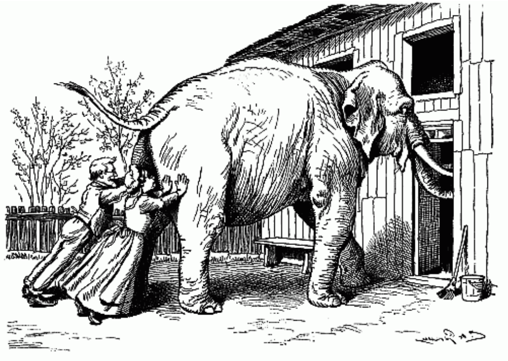
Sommaire

Probabilistic roadmap



- On considère un algorithme de type PRM (Probabilistic Roadmap).
- Certes, plus on tire de configurations, plus on peut penser qu'il n'y a pas de chemin.
- Cependant, ça prend du temps, et on ne peut pas être *sûr*.

Déconnexion



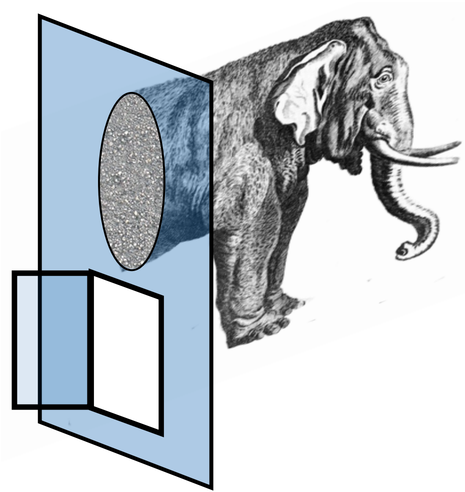
- Cela dit, dans certains cas, il n'y a *clairement* pas de chemin.
- Comment pourrait-on s'en rendre compte ?

Cadre

- Le robot (ici, l'éléphant) est un polyhèdre qui se déplace dans un espace à trois dimensions. (Peu importe comment.)
- L'obstacle est un plan percé d'une ouverture polygonale.
- Le robot veut d'aller d'un côté à l'autre.
- Nous, on veut prouver que c'est impossible.

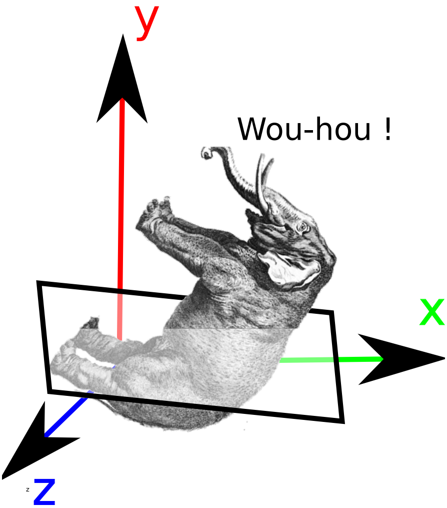
Sommaire

La section



- Pourquoi ça ne passe pas ?
- La section de l'éléphant par le plan de la porte ne peut pas être contenue dans la porte.
- En fait, il faudrait prendre en compte toutes les orientations possibles de l'éléphant.

Continuité



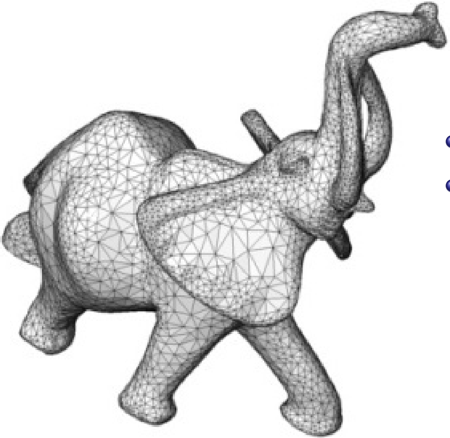
- Par continuité, il y a forcément un moment où 50% du volume de l'éléphant est d'un côté de la porte, et 50% de l'autre.
- Pour chaque orientation de l'éléphant, on regarde la section où la moitié du volume est de chaque côté.
- On peut éventuellement faire de même pour d'autres proportions.

Problèmes

- Comment découper l'éléphant suivant une orientation de sorte à répartir le volume ?
- Comment tester "toutes" les orientations ? (Continuité de la preuve.)
- Comment tester si la section rentre dans la porte ?

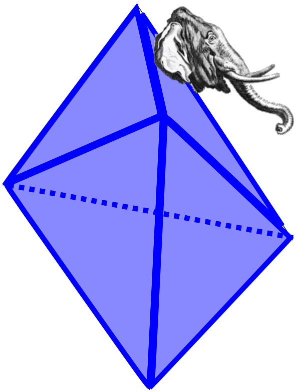
Sommaire

Prétraitement



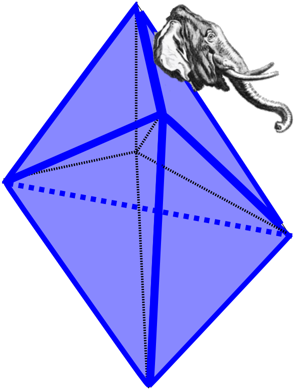
- On triangule les faces du polyèdre.
- On trie les points par coordonnée z croissante, où z est la direction d'intérêt.

Pour un plan donné



- Pour un plan donné, le volume est :
    - la somme des polyèdres au-dessus
    - plus un polynôme de degré 3 correspondant aux tétraèdres rencontrés.

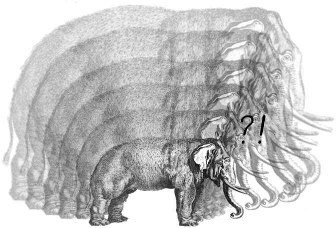
Démarche générale



- On cherche par dichotomie l'intervalle sans points rencontrés dans lequel il faut qu'on se place.
- Dans le bon intervalle, on résout l'équation de degré 3.

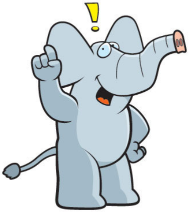
Sommaire

Idée



- On rétrécit l'éléphant d'une constante ϵ (ie. on retire les points à distance $\leq \epsilon$ de la frontière).
- Si le petit éléphant ne passe pas dans une direction, alors le gros éléphant ne passe pas non plus pour toutes les directions "proches".

Résultat formel



Théorème

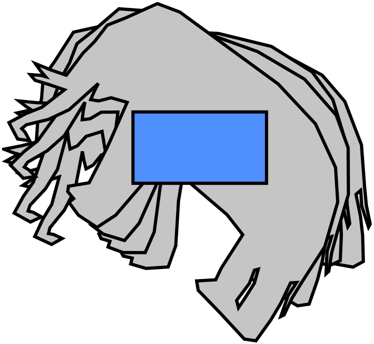
On note S_d^ϵ la projection de l'éléphant rétréci de ϵ suivant la direction d.
On note $S_{d'}$ la projection du gros éléphant suivant d'.
On note δ le diamètre de la projection du gros éléphant sur le plan de la porte G.

Si S_d^ϵ ne passe pas par G, alors $S_{d'}$ non plus pour toute d' formant avec d un angle $\leq \frac{\epsilon}{\delta}$.

- En fait, on pourrait faire mieux.
- En fait, on va plutôt calculer ϵ connaissant δ et d.

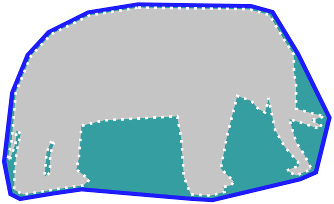
Sommaire

Rotation



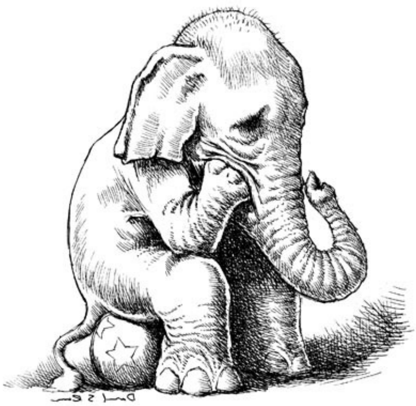
- On ne sait pas quelle rotation il faut appliquer à l'éléphant autour de l'axe.
- On teste “toutes” les rotations (ie. toutes les rotations de la section).
- On utilise le même mécanisme de continuité que tout à l'heure.
- Reste la translation.

Cas d'une porte convexe



- La porte est convexe !
- Donc si l'éléphant passe, son enveloppe convexe passe aussi !
- Calcul linéaire, preuve de non-inclusion de taille constante.

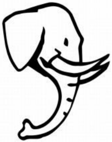
Cas général

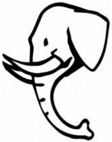


- C'est plus compliqué.
- Décomposition en convexes disjoints.
- Quelques autres pistes.

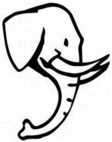
Sommaire

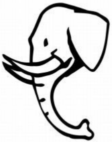
Résumé



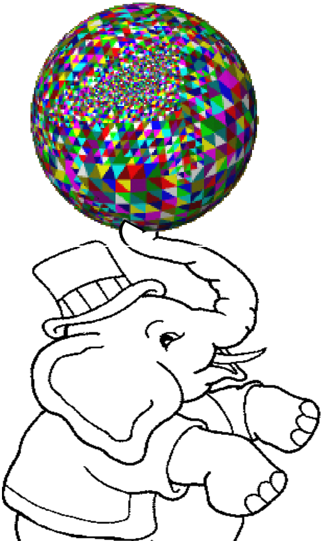


- On choisit une proportion de volume de part et d'autre (par exemple, moitié-moitié).
- On énumère toutes les directions en utilisant la continuité de la preuve.
- Pour une direction, on évalue toutes les rotations de la même manière.
- S'il existe une proportion telle qu'il n'y ait inclusion pour aucune direction et rotation, alors on a prouvé la déconnexion.





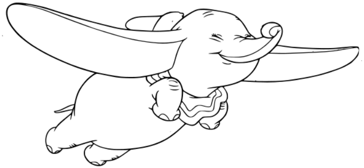
La sphère des directions



- On commence par se prendre un huitième de sphère (ϵ/δ) ; on calcule δ, on en déduit ϵ.
- Si ça marche, tant mieux.
- Sinon, on raffine ; on découpe le morceau en sous-morceaux, où on réessaie avec un meilleur ϵ (donc plus de chances de succès).
- On continue comme ça jusqu'à une limite de raffinement où on abandonne. (Se rappeler qu'il peut effectivement y avoir un chemin !)

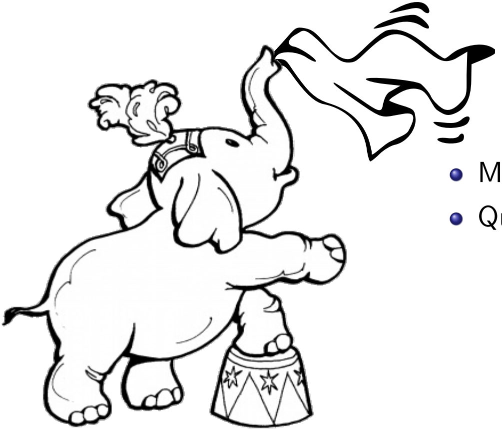
Sommaire

Prolongements



- Implémentation effective, optimisations, etc.
- Généraliser pour un obstacle quelconque (couper suivant des plans arbitraires ?).
- Utilisation parallèle d'un PRM et d'un prouveur de déconnexion.
- Passer les milestones au PRM.
- Aide au debug.

Merci !



- Merci pour votre attention !
- Questions ?