70.03M

SESSION 2007

Filière MP (groupes MP/MPI et groupe I)

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Filières MP PC (groupe I)

Épreuve optionnelle commune aux ENS de Paris et Lyon

MATHÉMATIQUES MPI 2

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Nous notons $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le sous-espace des fonctions k fois continûment dérivables, pour un entier $k \geq 1$. L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est l'intersection de tous les espaces $\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Nous adoptons la notation $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est hölderienne d'exposant $\alpha \in]0,1]$, si la quantité

$$N_\alpha(f) = \sup_{x,y\in\mathbb{R}, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

est finie. Pour $0 < \alpha < 1$ On note $\mathcal{H}^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions hölderiennes d'exposant α. Une fonction f hölderienne d'exposant 1 est dite lipschitzienne. On note $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = N_1(f)$, et $\mathrm{Lip}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes.

Dans tout le problème, on suppose donnée une fonction $g \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 1-périodique, ainsi que deux nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$, avec

$$0 < a \leq 1\,, \qquad b > 1\,.$$

On cherche à étudier certaines propriétés de régularité de la fonction « de type Weierstrass » définie par

$$W(x) = \sum_{n\geq 0} b^{-an} g(b^n x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Dans la partie I, on se concentre sur des propriétés de régularité élémentaires des fonctions W.

Les parties II, III et IV ont pour but de montrer que la fonction W n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$, dans le cas particulier où g est une fonction cosinus.

La partie V montre que dans un cas plus général, l'alternative suivante est vérifiée : ou bien W est lipschitzienne, ou bien elle n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Les différentes parties sont raisonnablement indépendantes entre elles, de sorte que chaque partie peut être abordée directement, en admettant, pour les parties III et IV, les résultats de la partie précédente.

I Généralités

1. Montrer que la série de la formule (1) définit bien une fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, qui de plus est continue et bornée.

2. Dans cette question seulement, on suppose que b est un entier naturel strictement plus grand que 1. Montrer que W est 1-périodique.

3. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit la fonction $Tf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$Tf(x) = \frac{f(bx)}{b^a}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

La fonction g étant fixée par l'énoncé, on considère alors l'équation

$$f = g + Tf\,, \tag{2}$$

dont l'inconnue est la fonction f.

3.a. Montrer que W satisfait l'équation (2).

3.b. Montrer que W est l'unique solution de l'équation (2) qui soit continue et bornée.

4. Dans cette question on suppose que $a < 1$.

4.a. Montrer que pour tout entier N, et tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|W(x) - W(y)| \leq \|g\|_{\text{Lip}} \frac{b^{(1-a)N}}{b^{1-a} - 1} |x - y| + \frac{2\|g\|_\infty}{1 - b^{-a}} b^{-aN}.$$

4.b. En déduire que $W \in \mathcal{H}^a(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5. On suppose à présent que $a = 1$, et que g est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5.a. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$,

$$|g(x + h) + g(x - h) - 2g(x)| \leq C|h|^2.$$

5.b. En s'inspirant de la question **4.**, montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$,

$$|W(x + h) + W(x - h) - 2W(x)| \leq C'|h|.$$

II Inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction sommable sur $\mathbb{R}$. On définit une fonction $\mathcal{F}f$, appelée *transformée de Fourier* de f, par la formule

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-\mathrm{i}yx) \mathrm{d}x, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

On note également, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\mathcal{F}}f(y) = \mathcal{F}f(-y).$$

Le but de cette partie est de montrer la formule dite d'inversion de Fourier (question **6.**) pour des fonctions assez régulières, en utilisant des résultats connus sur les séries de Fourier.

Dans toute cette partie, on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifiant

$$|x^2 f(x)| \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.a. Montrer que pour tout $h > 0$, la série de terme général $f(nh), n \geq 0$ est sommable.

1.b. Montrer que l'on a la convergence

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} hf(nh) \underset{h \to 0, h > 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x.$$

1.c. Montrer que l'on a la convergence

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} hf(nh) \underset{h\to 0, h>0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

après avoir donné un sens au terme de gauche.

2. On définit pour $T > 0$,

$$f_T(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kT).$$

Montrer que cette série de fonctions converge uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$, et définit une fonction f_T continue sur $\mathbb{R}$, et T-périodique.

3. On note

$$c_n(f_T) = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x)\exp\left(-\frac{2\mathrm{i}\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x\,,$$

le n-ième coefficient de Fourier de f_T dans la base de Fourier des fonctions T-périodiques $x \mapsto \exp(2\mathrm{i}\pi nx/T), n \in \mathbb{Z}$. Montrer soigneusement l'égalité

$$c_n(f_T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\mathcal{F}f\left(\frac{2\pi n}{T}\right).$$

4. On suppose de plus, et jusqu'à la fin de cette partie, que $\mathcal{F}f$ est une fonction continue vérifiant, comme pour f,

$$|y^2\mathcal{F}f(y)| \underset{|y|\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

On note $S_{N,T}$ la N-ième somme de Fourier de f_T :

$$S_{N,T}(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f_T)\exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi nx}{T}\right).$$

4.a. Montrer que la série trigonométrique $(S_{N,T}, N \geq 0)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ lorsque $N \to \infty$.

4.b. Montrer que l'on a

$$\int_0^T |f_T(x) - S_{N,T}(x)|^2\,\mathrm{d}x \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

4.c. En déduire que f_T est somme ponctuelle de sa série de Fourier : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_T(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_T)\exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi nx}{T}\right).$$

5. Montrer que pour tout x, $f_T(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $T \to \infty$.

6. Déduire des précédentes questions que l'on a la *formule d'inversion*

$$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f\,.$$

III Construction d'une ondelette

1. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que pour tout choix de $m, n \geq 0$, $|x^n f^{(m)}(x)|$ tend vers 0 lorsque $|x| \to \infty$, où l'on a noté $f^{(m)}$ la dérivée m-ième de la fonction f.

1.a. Montrer que si $f \in \mathscr{S}$ alors sa transformée de Fourier est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{F}f)^{(n)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathrm{i}x)^n f(x) \exp(-\mathrm{i}yx) \mathrm{d}x.$$

1.b. Montrer que si $f \in \mathscr{S}$ alors $\mathcal{F}f \in \mathscr{S}$.

2. Soit ψ_0 la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

2.a. Montrer que ψ_0 est continue sur $\mathbb{R}$.

2.b. Montrer que ψ_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et que sa dérivée d'ordre n s'exprime sous la forme $R_n(x) \exp(-1/x)$, où R_n est une fraction rationnelle.

2.c. Montrer que ψ_0 est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.d. Soient $a < b$ deux réels. Construire une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ prenant des valeurs réelles, strictement positive sur $]a, b[$ et nulle ailleurs.

3. Soit $b > 0$ un nombre réel. Montrer qu'il existe une fonction $\Psi_b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sommable ainsi que $x \mapsto x\Psi_b(x)$, telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_b(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\Psi_b(x) \mathrm{d}x = 0.$$

et dont la transformée de Fourier est strictement positive sur $]1/b, b[$ et nulle ailleurs. On pourra utiliser la formule d'inversion de la question **II.6**.

IV Non-dérivabilité de W dans le cas $g(x) = \cos(2\pi x)$

Dans cette partie, on suppose que la fonction g est donnée par $g(x) = \cos(2\pi x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que la fonction W associée n'est dérivable en aucun point.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, bornée, dérivable en un point $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut écrire pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon_x(h)\,,$$

où ε_x est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en 0.

2. Dans cette question, on considère une fonction continue $\Psi_b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que construite en **III.3.** En particulier, Ψ_b est sommable ainsi que $x \mapsto x\Psi_b(x)$, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_b(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\Psi_b(x)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Si f est une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et pour $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$c(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Psi_b\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)\mathrm{d}y.$$

2.a. Montrer que la définition de $c(\alpha, x)$ a bien un sens.

2.b. Le réel x étant fixé, montrer que si f est dérivable en x, alors $c(\alpha, x) \to 0$ quand $\alpha \to 0$.

3. On rappelle que pour un $a \in]0,1]$, et $b > 1$,

$$W(x) = \sum_{n\geq 0} b^{-an}\cos(2\pi b^n x)\,.$$

3.a. Montrer que W n'est pas dérivable en 0.

3.b. Montrer que W n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

V Une alternative pour W

Dans cette partie, on se place à nouveau dans le cas général d'une fonction g lipschitzienne 1-périodique. On suppose par ailleurs que $a \in]0,1[$, et que $b > 1$ est un nombre entier, de sorte que W est 1-périodique par **I.2.**

1. On suppose qu'il existe trois réels x, h, u avec $h, u > 0$, tels que

$$\frac{|W(x+h) - W(x)|}{h} \geq \frac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a}-1}(1+u)\,.$$

Montrer qu'alors,

$$\frac{|W(b^{-1}(x+h)) - W(b^{-1}x)|}{b^{-1}h} \geq \frac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a}-1}(1+b^{1-a}u)\,.$$

On pourra utiliser le fait que W vérifie l'équation (2).

2. On suppose que la quantité $\|W\|_{\mathrm{Lip}}$, éventuellement infinie, est strictement plus grande que $\|g\|_{\mathrm{Lip}}/(b^{1-a}-1)$.

2.a. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, $u > 0$ et $h \in]0,1[$ tels que

$$\frac{|W(x_0+h) - W(x_0)|}{h} \geq \frac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a}-1}(1+u)\,.$$

2.b. Les nombres h, u étant fixés par la question précédente, montrer qu'il existe $l > 1$ tel que pour tout intervalle I de longueur $\ell(I) > l$, il existe un réel x_I vérifiant $\{x_I, x_I+h\} \subset I$, et

$$\frac{|W(x_I + h) - W(x_I)|}{h} \geqslant \frac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a} - 1}(1 + u)\,.$$

2.c. Soit J un sous-intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert de longueur $\ell(J) < 1$, et N l'unique entier tel que

$$lb^{-N} \leq \ell(J) < lb^{-N+1}\,,$$

où l est défini dans la question précédente. En considérant l'intervalle $I = b^N J = \{b^N x : x \in J\}$, montrer que l'on peut trouver deux nombres distincts x_J, y_J dans J, tels que

$$\frac{|W(x_J) - W(y_J)|}{|x_J - y_J|} \geq \frac{u\|g\|_{\mathrm{Lip}} b^{N(1-a)}}{b^{1-a} - 1}\,.$$

2.d. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de g, a, b, telle que pour tout intervalle J de longueur $\ell(J) < 1$, on a

$$\sup_{x \in J} W(x) - \inf_{x \in J} W(x) \geq C\ell(J)^a\,.$$

3. Déduire des questions précédentes que l'on a l'alternative suivante pour W :

(i) ou bien W est lipschitzienne avec

$$\|W\|_{\mathrm{Lip}} \leq \frac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a} - 1}\,,$$

(ii) ou bien W n'est nulle part dérivable.

4. Donner un exemple de fonction g, non constante, où le premier point de l'alternative précédente est vérifié.

FIN