Généralités

1) g est bornée car continue 1-périodique et $b^{-a} \in]0,1[$ donc la série définissant W est normalement convergente sur $\mathbf{R}$. On a $|W(x)| \leqslant \|g\|_\infty \sum_{n\geqslant 0} b^{-an} = \dfrac{\|g\|_\infty}{1-b^{-a}}$, donc W est bornée sur $\mathbf{R}$.

2) Chaque terme de la série l'est.

3a) Calcul immédiat.

3b) L'équation étant linéaire en f, il suffit de prouver que si f est continue, bornée, solution de $f = Tf$ alors $f = 0$. De fait, on a $\|f\|_\infty = \|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty/b^a$, ce qui implique $\|f\|_\infty = 0$ d'où $f = 0$.

4a) Regrouper $W(x) - W(y)$ dans une seule série, puis découper en somme pour $0 \leqslant n < N$ et somme pour $n \geqslant N$. La majoration demandée vient de suite.

4b) Soient $x, y \in \mathbf{R}$.

Si $|x-y| < 1$, on note N l'unique entier naturel tel que $b^{-N} \leqslant |x-y| < b^{1-N}$. Alors, d'après la question précédente, $|W(x) - W(y)| \leqslant \dfrac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a}-1}(b/|x-y|)^{1-a}|x-y| + \dfrac{2\|g\|_\infty}{1-b^{-a}}|x-y|^a = C|x-y|^a$.

Si $|x-y| \geqslant 1$ on a $|W(x) - W(y)| \leqslant 2\|W\|_\infty \leqslant 2\|W\|_\infty |x-y|^a$.

D'où $|W(x) - W(y)| \leqslant \max(C, 2\|W\|_\infty)|x-y|^a$ dans tous les cas.

5a) Formule de Taylor avec reste intégral :

$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + \displaystyle\int_{t=0}^{h} (h-t)g''(x+t)\,dt = g(x) + hg'(x) + h^2 \int_{u=0}^{1} (1-u)g''(x+hu)\,du.$

En remplaçant h par $-h$ et en additionnant il vient :

$|g(x+h) + g(x-h) - 2g(x)| = h^2 \Big| \displaystyle\int_{u=0}^{1} (1-u)(g''(x+hu) + g''(x-hu))\,du \Big| \leqslant h^2\|g''\|_\infty.$

Rmq : la condition $|h| \leqslant 1$ est inutile.

5b) D'après l'inégalité précédente, pour $x, h \in \mathbf{R}$ et pour $N \in \mathbf{N}$ on a :

$$|W(x+h) + W(x-h) - 2W(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} Cb^n|h|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} 4\|g\|_\infty b^{-n} \leqslant |h|^2 \frac{b^N}{b-1} + 4\|g\|_\infty \frac{b^{-N}}{1-b^{-1}}.$$

Si $|h| \leqslant 1$, on choisit N tel que $b^{-N} \leqslant h < b^{1-N}$ et on obtient l'inégalité demandée.

Inversion de Fourier

1a) La fonction $x \longmapsto x^2 f(x)$ est continue et a des limites finies en $\pm\infty$ donc elle est bornée par un réel C. On en déduit $|f(nh)| \leqslant \dfrac{C}{n^2h^2}$ pour $h > 0$ et $n \geqslant 1$, ce qui prouve la convergence absolue.

1b) L'intégrale $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente puisqu'elle n'est généralisée qu'en $+\infty$ et $f(x) \leqslant C/x^2$ comme on l'a vu précédemment. De plus, on a :

$$\int_{t=0}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x=nh}^{(n+1)h} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} h \int_{t=0}^{1} f((n+t)h)\,dt.$$

On doit donc prouver que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h\displaystyle\int_{t=0}^{1}(f((n+t)h)-f(nh))\,dt \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$. Soit $h>0$ et $N\in\mathbf{N}^*$ à fixer en fonction de h. Pour $n\geqslant N$ on a :

$$\Big|h\int_{t=0}^{1}(f((n+t)h)-f(nh))\,dt\Big| \leqslant h\int_{t=0}^{1}\Big(\frac{C}{(n+t)^2h^2}+\frac{C}{n^2h^2}\Big) = \frac{1}{h}\Big(\frac{C}{n(n+1)}+\frac{C}{n^2}\Big) \leqslant \frac{1}{h}\times\frac{3C}{n(n+1)}$$

(car $n^2\geqslant \frac{1}{2}n(n+1)$). On en déduit :

$$\Big|\sum_{n=N}^{\infty} h\int_{t=0}^{1}(f((n+t)h)-f(nh))\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{h}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{3C}{n(n+1)} = \frac{3C}{Nh}.$$

Soit alors $\varepsilon>0$: f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ (car continue ayant des limites finies en $\pm\infty$) donc il existe $\delta>0$ tel que $\forall\, x,y\in\mathbf{R}$, $|x-y|\leqslant\delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. Pour $0<h\leqslant\delta$, et $N\in\mathbf{N}^*$ on a donc :

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} h\int_{t=0}^{1}(f((n+t)h)-f(nh))\,dt\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} h\int_{t=0}^{1}\varepsilon\,dt+\frac{3C}{Nh} = (N+1)h\varepsilon+\frac{3C}{Nh}.$$

Choisissons $N\in\mathbf{N}^*$ de sorte que $(N+1)h\leqslant 2/\sqrt{\varepsilon}$ et $Nh\geqslant 1/\sqrt{\varepsilon}$: c'est possible si $h\leqslant 1/\sqrt{\varepsilon}$, ce qu'on suppose désormais. On obtient finalement :

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} h\int_{t=0}^{1}(f((n+t)h)-f(nh))\,dt\Big| \leqslant (2+3C)\sqrt{\varepsilon}$$

pour tout h suffisamment proche de zéro, ce qui suffit à conclure.

1c) On pose $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} hf(nh) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} hf(nh)+\sum\limits_{n=0}^{\infty} hf(-nh)-hf(0)$, sous réserve de convergence des deux séries. La première converge, et sa somme tend, lorsque h tend vers 0^+, vers $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,dx$, on l'a vu. La deuxième converge et sa somme tend, lorsque h tend vers 0^+, vers $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} f(-x)\,dx = \int_{x=-\infty}^{0} f(x)\,dx$ par remplacement de $f(x)$ en $f(-x)$, et le dernier terme tend vers zéro lorsque h tend vers 0^+.

2) Soit $[a,b]$ un intervalle compact et $N\in\mathbf{N}$ tel que $a+NT>0$ et $b-NT<0$. Pour $x\in[a,b]$ et $k\geqslant N$ on a $|f(x+kT)|\leqslant \dfrac{C}{(x+kT)^2}\leqslant\dfrac{C}{(a+kT)^2}$ et de même $|f(x-kT)|\leqslant\dfrac{C}{(b-kT)^2}$. Ceci prouve que les séries $\sum\limits_{k=N}^{\infty} f(x+kT)$ et $\sum\limits_{k=-N}^{\infty} f(x-kT)$ sont normalement convergentes sur $[a,b]$; il en est donc de même de la série $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} f(x+kT)$. La continuité et la T-périodicité de f_T sont alors évidentes.

3) $f_T(x)\exp(-2i\pi nx/T) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} f(x+kT)\exp(-2i\pi nx/T)$, série normalement convergente sur $[0,T]$ donc on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned}
c_n(f_T) &= \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{x=0}^{T} f(x+kT)\exp(-2i\pi nx/T)\,dx\\
&= \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{x=0}^{T} f(x+kT)\exp(-2i\pi n(x+kT)/T)\,dx\\
&= \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{x=kT}^{(k+1)T} f(x)\exp(-2i\pi nx/T)\,dx\\
&= \frac{1}{T}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-2i\pi nx/T)\,dx\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\mathcal{F}f(2\pi n/T).
\end{aligned}$$

Le regroupement $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{x=kT}^{(k+1)T} = \int_{x=-\infty}^{+\infty}$ est justifié par la convergence de cette dernière intégrale.

4a) Cela résulte de l'inégalité $|c_n(f_T)| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \times \frac{C'T^2}{4\pi^2 n^2}$ avec $C' = \sup\{y^2|\mathcal{F}f(y)|,\ y \in \mathbf{R}\}$.

4b) C'est, en substance, le théorème de Parseval.

4c) Soit $S_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_T)\exp(2i\pi nx/T)$: la série convergeant uniformément sur $\mathbf{R}$, S_T est une fonction continue T-périodique et pour $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(S_T) = c_n(f_T)$ par intégration terme à terme. Ainsi f_T et S_T sont deux fonctions continues T-périodiques ayant mêmes coefficients de Fourier ; elles sont égales.

5) Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. On suppose T suffisamment grand pour que $x + T > 0$ et $x - T < 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
|f_T(x) - f(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} f(x+kT) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x-kT)\Big| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{(x+kT)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{(x-kT)^2} \\
&\leqslant \frac{C}{(x+T)^2} + \int_{u=1}^{+\infty} \frac{C\,du}{(x+uT)^2} + \frac{C}{(x-T)^2} + \int_{u=1}^{+\infty} \frac{C\,du}{(x-uT)^2} \\
&= \frac{C}{(x+T)^2} + \frac{C}{T(x+T)} + \frac{C}{(x-T)^2} + \frac{C}{T(T-x)} \\
&\xrightarrow[T\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

6) Soit $x \in \mathbf{R}$. En posant $h = \frac{2\pi}{T}$ et $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}f(u)\exp(iux)$, on a $f_T(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} hg(nh)$, et g est continue, négligeable devant $1/u^2$ à l'infini, donc on peut appliquer **1c** : $f_T(x) \xrightarrow[T\to\infty]{} \int_{u=-\infty}^{+\infty} g(u)\,du = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x)$.

Construction d'une ondelette

1a) $(x,y) \longmapsto f(x)\exp(-iyx)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Leibniz : la fonction et sa dérivée partielle par rapport à y sont continues par rapport à chaque variable et dominées par une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$ par rapport à x. On a donc $(\mathcal{F}f)'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{+\infty}(-ix)f(x)\exp(-iyx)\,dx = \mathcal{F}g(y)$ avec $g(x) = -ixf(x)$. Ceci démontre la formule demandée pour $n = 1$. Le cas général se traite par récurrence sur n.

1b) On a en intégrant par parties : $\mathcal{F}(f')(y) = iy\mathcal{F}f(y)$ et plus généralement : $\mathcal{F}(f^{(n)})(y) = (iy)^n\mathcal{F}f(y)$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $y \in \mathbf{R}$. Comme $f^{(n)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, il en résulte que $y \longmapsto (iy)^n\mathcal{F}f(y)$ est bornée sur $\mathbf{R}$, ce qui implique $y^{n-1}\mathcal{F}f(y) \xrightarrow[|y|\to\infty]{} 0$.

2abc) Questions élémentaires.

2d) Prendre $f(x) = \psi_0(x-a)\psi_0(b-x)$.

3) On suppose $b > 1$ pour que l'intervalle $]1/b, b[$ soit bien défini. On pose $f(x) = \psi_0(-x-1/b)\psi_0(b+x)$ et $\psi_b = \mathcal{F}f$. Donc $\psi_b \in \mathcal{S}$, ce qui implique que ψ_b et $y \longmapsto y\psi_b(y)$ sont intégrables sur $\mathbf{R}$. De plus, $x^2f(x)$ et $y^2\psi_b(y)$ ont des limites nulles à l'infini donc $\mathcal{F}\psi_b(x) = f(-x)$, d'après la formule d'inversion de Fourier. Cette dernière quantité est bien strictement positive entre $1/b$ et b, et nulle ailleurs. Enfin, $\int_{y=-\infty}^{+\infty}\psi_b(y)\,dy = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(0) = 0$ et $\int_{y=-\infty}^{+\infty} y\psi_b(y)\,dy = i\sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)'(0) = 0$.

Non dérivabilité de W dans le cas $g(x) = \cos(2\pi x)$

1) Prendre $\varepsilon_x(h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$ pour $h \neq 0$ et $\varepsilon_x(0) = 0$. Par construction ε_x est continue en tout point $h \neq 0$; elle est aussi continue en $h = 0$ par définition de $f'(x)$. Enfin ε_x est bornée sur $\mathbf{R}$ car continue, de limite $-f'(x)$ pour $|h| \to \infty$ puisque f est bornée.

2a) f est bornée et ψ_b est intégrable donc l'intégrale définissant $c(\alpha, x)$ est convergente.

2b)

$$\begin{aligned} c(\alpha,x) &= \frac{1}{\alpha}\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x+\alpha t)\psi_b(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_b(t)\,dt + \int_{t=-\infty}^{+\infty} f'(x)t\psi_b(t)\,dt + \int_{t=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_x(\alpha t)t\psi_b(t)\,dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_x(\alpha t)t\psi_b(t)\,dt. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée s'applique à cette dernière intégrale car ε_x est bornée, $t \longmapsto t\psi_b(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et $\varepsilon_x(\alpha t) \xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} 0$ à t fixé.

3a) Avec $f = W$ on a :

$$\begin{aligned} c(\alpha,0) &= \frac{1}{\alpha}\int_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b^{-an}\cos(2\pi b^n \alpha t)\psi_b(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} b^{-an}\int_{t=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi b^n \alpha t)\psi_b(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} b^{-an}\sqrt{2\pi}\,\frac{\mathcal{F}\psi_b(2\pi b^n\alpha) + \mathcal{F}\psi_b(-2\pi b^n \alpha)}{2}. \end{aligned}$$

L'intégration terme à terme est justifiée par le fait que $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty} |b^{-an}\cos(2\pi b^n\alpha t)\psi_b(t)|\,dt \leqslant b^{-an}\int_{t=-\infty}^{+\infty} |\psi_b(t)|\,dt$, terme général d'une série convergente.

Prenons $\alpha = \dfrac{1}{2\pi b^k}$ avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $c(\alpha, 0) = \dfrac{b^{-ak}\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\psi_b(1)}{2\alpha} = \frac{1}{2}(2\pi)^{a+1/2}\mathcal{F}\psi_b(1)\alpha^{a-1}$ car seul le terme pour $n = k$ est non nul. Ainsi, $c(\alpha, 0)$ ne tend pas vers zéro quand k tend vers l'infini. On contredit **2b**, donc W n'est pas dérivable en 0.

3b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Par des calculs similaires on aboutit à $c(\alpha,x) = \frac{1}{2\alpha}\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{-an}\sqrt{2\pi}\exp(2i\pi b^n x)\mathcal{F}\psi_b(2\pi b^n\alpha)$. En particulier pour $\alpha = 1/(2\pi b^k)$, $|c(\alpha,x)| = |c(\alpha,0)| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$, donc W n'est pas dérivable en x.

Une alternative pour W

1) Immédiat.

2a) Par hypothèse il existe $x_0 \in \mathbf{R}$, $h > 0$, $u > 0$ tel que $|W(x_0+h) - W(x_0)|/h \geqslant \|g\|_{\mathrm{Lip}}(1+u)/(b^{1-a}-1)$. Si $h < 1$, c'est bon. Si $h = 1$ alors par continuité on a $|W(x_0+k) - W(x_0)|/k \geqslant \|g\|_{\mathrm{Lip}}(1+u/2)/(b^{1-a}-1)$ pour tout k suffisamment proche de 1, donc c'est encore bon. Enfin, si $h > 1$, on peut remplacer h par $h-1$, le premier membre augmentant alors. De proche en proche, c'est bon pour tout $h > 0$.

2b) On peut remplacer x_0 par $x_0 + n$ pour tout entier relatif n. Ainsi, $\ell = 1 + h$ convient car si I est un intervalle de longueur strictement supérieure à $1+h$ alors $I \cap (I - h)$ contient un segment de longueur 1, donc contient un $x_I = x_0 + n$ et par construction, $x_I + h \in I$.

2c) Légère erreur d'énoncé : on a $\ell(I) \geqslant \ell$ alors qu'il faudrait l'inégalité stricte. On choisit donc plutôt $N \in \mathbf{N}$ tel que $\ell b^{-N} < \ell(J) \leqslant \ell b^{1-N}$ (c'est possible puisque $\ell(J) < 1 < \ell b$), ce qui assure l'existence de x_I défini en **2b**. On a alors $\dfrac{|W(b^{-p}(x_I+h)) - W(b^{-p}x_I)|}{b^{-p}h} \geqslant \dfrac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a}-1}(1 + b^{p(1-a)}u) \geqslant \dfrac{u\|g\|_{\mathrm{Lip}}b^{p(1-a)}}{b^{1-a}-1}$ par récurrence sur p, et pour $p = N$: $b^{-N}x_I, b^{-N}(x_I+h) \in J$.

2d) Car $|W(x_J) - W(y_J)| \geqslant \dfrac{hu\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a}-1}b^{-Na} \geqslant \dfrac{hu\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{(b^{1-a}-1)(\ell b)^a} \times \ell(J)^a$.

3) Remarque préliminaire :si W est lipschitzienne, alors on a nécessairement $\|W\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \dfrac{\|g\|_{\mathrm{Lip}}}{b^{1-a}-1}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in \mathbf{R}$ distincts tels que $|W(x) - W(y)| \geqslant (\|W\|_{\mathrm{Lip}} - \varepsilon)|x - y|$. On a alors :

$$\begin{aligned}|g(x/b) - g(y/b)| &= |b^{-a}(W(x) - W(y)) - (W(x/b) - W(y/b))| \\ &\geqslant b^{-a}|W(x) - W(y)| - |W(x/b) - W(y/b)| \\ &\geqslant (\|W\|_{\mathrm{Lip}}(b^{1-a} - 1) - b^{1-a}\varepsilon)|x/b - y/b|,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\|g\|_{\mathrm{Lip}} \geqslant \|W\|_{\mathrm{Lip}}(b^{1-a}-1) - b^{1-a}\varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, la propriété **(i)** est équivalente au caractère lipschitzien de W. Il s'agit donc de prouver que W est lipschitzienne si et seulement si elle est dérivable en au moins un point.

Si W n'est pas lipschitzienne alors x, u, h définis en **1** existent et donc le résultat de **2d** est valide. Considérons alors un éventuel $x \in \mathbf{R}$ tel que W soit dérivable en x : on a $W(y) = W(x) + (y-x)W'(x) + (y-x)\varepsilon_x(y-x)$ (cf. **IV-1**). Soit J un intervalle ouvert quelconque contenant x : pour tout $y \in J$ on a $|W(y) - W(x)| \leqslant \ell(J)(|W'(x)| + \|\varepsilon_x\|_\infty)$ et donc $\sup(W(J)) - \inf(W(J)) = \underset{\ell(J)\to 0}{O}(\ell(J))$ contrairement à **2d**. Ceci prouve que W est nulle part dérivable.

Si W est lipschitzienne alors elle est dérivable presque partout au sens de la mesure de Lebesgue. Ceci est une conséquence du théorème de Lebesgue suivant : *toute fonction numérique à variation bornée sur un intervalle est presque partout dérivable sur cet intervalle.* Il s'agit d'un théorème très au delà du programme des classes MP*, et on ne peut pas attendre des candidats qu'ils le connaissent. Il existe peut-être une démonstration élémentaire de la dérivabilité en *au moins un* point, mais je ne l'ai pas trouvée…

4) Soit W une fonction 1-périodique lipschitzienne non constante quelconque et $g = W - TW$. Donc g est 1-périodique, lipschitzienne et puisque $W = g + TW$, d'après **I-3b**, W est la fonction associée à g par (1). De plus, g n'est pas constante sinon W le serait.