Partie I

1.

1.a Soit $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ une partition subordonnée à $f \in \mathcal{D}$. On peut définir $g \in \mathcal{C}$ par $g = f'$ sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ (par définition de la classe $\mathcal{D}$ g aura bien une limite à gauche et/ou à droite en tout point x_i). La valeur de g aux points x_i est fixée de manière quelconque. Pour x et x' dans un intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, on a $\displaystyle\int_x^{x'} g(s)ds = f(x') - f(x)$, et cette égalité se prolonge à droite en x_i et à gauche en x_{i+1} par des limites : $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(s)ds = f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Donc, par Chasles, pour tout x dans un intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, on aura :

$$\int_0^x g(s)\,ds = \sum_{i=1}^{k-1}\big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big) + \int_{x_k}^x g(s)\,ds = f(x) - f(0) \quad .$$

Réciproquement, on sait que $\displaystyle\int_0^x g(s)\,ds$ définit une fonction dérivable en tout point où g est continue, et dont la dérivée vaut alors g . Comme $g \in \mathcal{C}$ signifie que g admet des limites à gauche et/ou à droite en tout point x_i d'une partition subordonnée à g , on a bien que $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(s)\,ds$ définit une fonction $f \in \mathcal{D}$, et ce pour la même partition subordonnée.

1.b On l'a vu dans la réciproque de la question précédente : (1) impose nécessairement $g = f'$ sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$.

1.c On remarque tout d'abord qu'en *réunissant* les points d'une partition subordonnée à $f_1 \in \mathcal{D}$ à ceux d'une partition subordonnée à $f_2 \in \mathcal{D}$ on obtient une partitions subordonnée *commune* à f_1 et f_2 . Sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ d'une telle partition, on a par dérivation classique d'un produit, $(f_1f_2)' = f_1g_2 + f_2g_1$. par produit et sommes de limites, cette égalité se prolonge à la limite à gauche et/ou à droite en chaque x_i . On a donc bien que $f_1f_2 \in \mathcal{D}$, de plus, on a vu dans la partie directe de la question **1.a** qu'alors l'égalité $(f_1f_2)(x) = (f_1f_2)(0) + \displaystyle\int_0^x (f_1g_2 + f_2g_1)(s)\,ds$ était vraie, ce qui définit bien $f_1g_2 + f_2g_1$ comme dérivée au sens de l'énoncé de f_1f_2 .

2. (On s'inspire de la preuve de Cauchy Schwarz). Par positivité de l'intégrale, on a, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \int_0^1 \big(g(s) + \lambda\big)^2\,ds = \lambda^2 + 2\lambda\int_0^1 g(s)\,ds + \int_0^1 \big(g(s)\big)^2\,ds \quad .$$

En appliquant ceci au point $\lambda = -\displaystyle\int_0^1 g(s)\,ds$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \big(g(s)\big)^2\,ds - \Big(\int_0^1 g(s)\,ds\Big)^2 \geqslant 0$, ce qu'on voulait.

S'il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus, c'est qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \big(g(s) + \lambda\big)^2\,ds = 0$, et on sait que cette égalité impose que l'intégrande soit nulle en tout point où celle-ci est continue. On a donc que $g(x) = -\lambda$ en tout point de continuité de g , i.e. partout sauf en un nombre fini de points.

3. En prenant comme au **1.c** une subdivision subordonnée commune, on voit que $\mathcal{D}$ est stable pour la somme, donc comme $\displaystyle\int_0^x g(s)\,ds$ est dans $\mathcal{D}$ quand g est dans $\mathcal{C}$ (vu au **1a**), $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(s)\,ds - x\int_0^1 g(s)\,ds$ est dans $\mathcal{D}$. Et il est clair que $f(1) = f(0) = 0$.

4. <u>C.S.</u> : l'intégrale ne dépendant pas de la valeur de l'intégrande en un nombre fini de points, l'hypothèse implique

$$\int_0^1 g(s)\theta'(s)\,ds = \int_0^1 C\theta'(s)\,ds = C.\big((\theta(1) - \theta(0)\big) = 0 \quad ,$$

la dernière égalité ayant lieu par définition de la dérivée θ' et parce que $\theta \in \mathcal{D}_0$.

<u>C.N.</u> : prenons pour fonction θ la fonction de $\mathcal{D}_0$ $x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(s)\,ds - x\int_0^1 g(s)\,ds$. Alors $\theta' = g - \displaystyle\int_0^1 g$, d'où

$$0 = \int_0^1 g\theta' = \int_0^1 g^2 - \Big(\int_0^1 g\Big)^2 \quad :$$

on est dans le cas d'égalité du **2**, donc $g = cste = C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$$0=\int_0^1 (\tilde f_1.\theta)'=\int_0^1 (\tilde f_1\theta'+g\theta) \quad .$$

Par différence avec la propriété supposée en hypothèse, on en déduit :

$$\forall\,\theta\in\mathcal{D}_0 \quad \int_0^1 (f-\tilde f_1)\theta'=0 \quad ,$$

ce qui implique par **4.** ci-dessus que $f-\tilde f_1=cste=C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. La fonction $\tilde f=\tilde f_1+C$ convient alors, puisque $C=\tilde f(0)$ vu que $\tilde f_1(0)=0$ par définition.

Partie II

1. Quand $u\in\mathcal{D}$, on a que $u'\in\mathcal{C}$, et donc $u'^2\in\mathcal{C}$ aussi. Or, on l'a dit, l'intégrale d'une fonction c.p.m. ne dépend pas de la valeur de la fonction en un nombre fini de points (et donc en particulier en ses points de discontinuité), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\,dx$ ne dépend pas du choix possible de u' parmi les dérivées de u .

2.

2.a Remarquons que $u_\lambda+\varepsilon\psi\in\mathcal{D}_0$. En écrivant

$$\big(1-(u+\varepsilon\psi)^2\big)^2=(1-u^2)^2-2\varepsilon(1-u^2)(2\psi+\varepsilon\psi^2)+\varepsilon^2(2\psi+\varepsilon\psi^2)^2 \quad ,$$

il vient, par linéarité de l'intégrale (et de la dérivation), et après simplification :

$$\frac{E_\lambda(u_\lambda+\varepsilon\psi)-E_\lambda(u_\lambda)}{\varepsilon}=\int_0^1 u'\psi'+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1\psi'^2-\lambda\int_0^1(1-u_\lambda)^2u_\lambda\psi+\varepsilon\frac{\lambda}{4}\int_0^1\Big(-2(1-u_\lambda^2)\psi^2+(2\psi+\varepsilon\psi^2)^2\Big) \quad ,$$

et on voit clairement que cette expression tend vers $\displaystyle\int_0^1 u'\psi'-\lambda\int_0^1(1-u_\lambda)^2u_\lambda\psi$ quand $\varepsilon\to 0$.

2.b $\mathcal{D}_0$ est stable par combinaisons linéaire, donc $u+\varepsilon\psi$ est toujours dans $\mathcal{D}_0$. Par minimalité de $E(u_\lambda)$, on a que la limite ci-dessus doit être $\geqslant 0$ quand $\varepsilon\to 0^-$ et être $\leqslant 0$ quand $\varepsilon\to 0^+$. Donc, cette limite est nécessairement nulle, d'où (3) .

2.c On est dans les conditions d'application du **I.5**, d'où il existe une fonction $\tilde f\in\mathcal{C}$, telle que, sauf en un nombre fini de points,

$$(4)\qquad u_\lambda'(x)=\tilde f(x)=\tilde f(0)+\int_0^x\Big(-\lambda\big(1-{u_\lambda}^2(s)\big)u_\lambda(s)\Big)\,ds \quad .$$

Or, l'intégrale du membre de droite de (4) est celle d'une fonction continue puisque $u_\lambda\in\mathcal{D}_0$ est continue. Donc le membre de droite de (4) admet une (même) limite à gauche et/ou à droite en tout point exceptionnel où (4) ne serait a priori pas vérifiée, ou en les points où u_λ' ne coïnciderait pas avec la dérivée de u_λ au sens classique. Mais alors le théorème limite de la dérivée (encore appelé «prolongement C^1 ») s'applique en ces points et prouve que (4) reste vrai même en ces points, et avec dans le membre de gauche la bonne valeur de la dérivée de u_λ au sens classique. Donc en fait u_λ est dérivable partout, et sa dérivée est égale à une fonction continue sur $[0,1]$, donc u_λ est en fait de classe C^1 sur $[0,1]$.
La même égalité (4) , maintenant vraie partout sur $[0,1]$, montre alors que u_λ' est de classe C^1 , puisqu'égale, à une constante près, à la primitive d'une fonction continue. Donc u_λ est de classe C^2 , et en dérivant (4) membre à membre, on trouve :

$$(5)\qquad u_\lambda''(x)=-\lambda\big(1-{u_\lambda}^2(x)\big)u_\lambda(x) \quad .$$

Maintenant, par récurrence immédiate, si on suppose u_λ de classe C^n , $n\geqslant 2$, sur $[0,1]$, (5) prouve, par stabilité de la classe C^n par les opérations algébriques, que u_λ'' est de classe C^n , donc que u_λ est de classe C^{n+2} sur $[0,1]$. Finalement, u_λ est de classe C^∞ sur $[0,1]$.

2.d En multipliant (5) par $u_\lambda'(x)$ on reconnaît une dérivée dans chacun des membres, donc, par intégration :

$$\frac12\big(u_\lambda'(x)\big)^2=\frac{\lambda}{4}\big(1-{u_\lambda}^2(x)\big)^2+cste \quad ,$$

(6) $\quad \exists C_\lambda \quad \forall x \in]0,1[\quad \left(u_\lambda'(x)\right)^2 = \frac{\lambda}{2}\left(\left(1-{u_\lambda}^2(x)\right)^2 - C_\lambda\right)$.

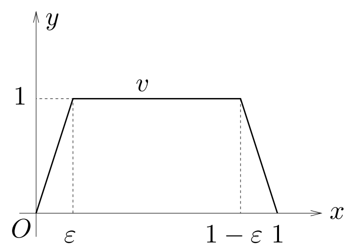
2.e On applique à u_λ le théorème de Rolle : il existe $c \in]0,1[$ tel que $u_\lambda'(c) = 0$. En appliquant (6) ci-dessus au point c , il vient $C_\lambda = \left(1 - {u_\lambda}^2(c)\right)^2 \geqslant 0$.

Si on prend dans (6) la limite en $x = 0$ par exemple, on a que $\frac{\lambda}{2}(1 - C_\lambda) = \left(u_\lambda'(0)\right)^2 \geqslant 0$, d'où $C_\lambda \leqslant 1$ (puisque λ est supposé > 0).

Supposons par l'absurde que qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $u_\lambda(x_0)^2 \geqslant 1$. Alors, comme $u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe y_0 dans $]0,1[$ tel que $u_\lambda(y_0) = 1$ (on a pris la valeur positive). En ce point : $(u_\lambda'(y_0))^2 = -\lambda/2C_\lambda \leqslant 0$ soit $u_\lambda'(y_0) = 0$. Or l'égalité (5) est une équation différentielle du second ordre autonome du type $u'' = f(u)$ où la fonction f est de classe C^1 puisque polynômiale. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc l'unicité d'une solution maximale répondant au problème de Cauchy en un point de $]0,1[$. L'existence de y_0 implique ainsi que u_λ est la fonction constante $u_\lambda = 1$; ce qui est contradictoire avec la condition $u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0$.

Finalement, $\forall\ x \in [0,1], u_\lambda(x_0)^2 < 1$.

3. Le graphe de la fonction v proposée est le suivant :



On voit que $v \in \mathcal{D}_0$, donc par définition $E_\lambda(u_\lambda) \leqslant E_\lambda(v)$. Or, un calcul utilisant le changement de variables $x = \varepsilon t$ donne :

$$E_\lambda(v) = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} + 2 \times \frac{\lambda}{4}\int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^2 dx = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\int_0^1 \left(1-u^2\right)^2 du = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{4}{15}\varepsilon\lambda \quad .$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon \in]0,1/2[$, donc, pour $\lambda > 4$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, on obtient

$$E_\lambda(u_\lambda) \leqslant E_\lambda(v) \leqslant \frac{19}{15}\sqrt{\lambda} \quad .$$

On constate que $E_\lambda(0) = \frac{\lambda}{4}$ dépasse la borne $C\sqrt{\lambda}$ pour $\lambda > \lambda_0$ suffisamment grand. Donc, pour $\lambda > \lambda_0$, u_λ ne peut pas être la fonction nulle. Dans ce cas, il y a au moins deux fonctions distinctes réalisant le minimum de E_λ , à savoir u_λ et $-u_\lambda$.

4.

4.a Pour $\lambda > 4$, on a $\frac{\lambda}{4}\int_0^1 (\phi_\lambda - 1)^2 \leqslant E_\lambda(u_\lambda) \leqslant C.\sqrt{\lambda}$, d'où en divisant par $\sqrt{\lambda} > 0$, on voit que $0 \leqslant \int_0^1 (\phi_\lambda - 1)^2 \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

4.b On a vu en **2.c** $0 \leqslant \varphi_\lambda \leqslant \mu_\lambda^2 < 1$. On en déduit $\left(1-\phi_\lambda^2\right)^2 \geqslant \left(1-\mu_\lambda^2\right)^2 \geqslant 0$, puis par intégration, $0 \leqslant \left(1-\mu_\lambda^2\right)^2 \leqslant \int_0^1 (\phi_\lambda - 1)^2$. Donc, par encadrement, $\mu_\lambda^2 \to 1$, et finalement $\mu_\lambda \to 1$.

<u>Partie III</u>

1. La fonction $v_\lambda = v$ précédente (avec $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$) convient pour $\lambda > 4$, et sinon on peut prendre $v_\lambda = 0$. En effet, $E_\lambda(0) = \frac{\lambda}{4} \leqslant C\sqrt{\lambda}$ pour $\lambda \leqslant 4$ si $C \geqslant 1$, ce qui est le cas.

$$\begin{aligned}E_\lambda(v_\lambda) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda}}{v'_\lambda}^2+\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}(1-v_\lambda^2)^2\right)\\ &\geqslant \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\times\frac{1}{2}\int_0^1 2\big|v'_\lambda(1-v_\lambda^2)\big| \quad , \ cqfd.\end{aligned}$$

(On a utilisé l'inégalité de l'énoncé avec $x=|v'_\lambda|$ et $y=|1-v_\lambda^2|$).

3. On a que $\big|v'_\lambda(1-v_\lambda^2)\big| = \big|(F\circ v_\lambda)'\big|$, donc l'inégalité ci-dessus se réécrit :

$$E_\lambda(v_\lambda)\geqslant\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^1\big|(F\circ v_\lambda)'\big| \quad .$$

Le maximum de la fonction continue v_λ est atteint en un point $c\in[0,1]$, et quitte à changer v_λ en $-v_\lambda$ ce qui ne change pas E_λ , on peut supposer $v_\lambda(c)=\eta_\lambda$ ($\geqslant 0$) . Alors, vu que $(F\circ v_\lambda)(0)=(F\circ v_\lambda)(1)=0$, et par inégalité de la moyenne, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1\big|(F\circ v_\lambda)'\big| &= \int_0^c\big|(F\circ v_\lambda)'\big|+\int_c^1\big|(F\circ v_\lambda)'\big|\\ &\geqslant \Big|\int_0^c(F\circ v_\lambda)'\Big|+\Big|\int_c^1(F\circ v_\lambda)'\Big|\\ &\geqslant 2(F\circ v_\lambda)(c)=2F(\eta_\lambda) \quad ,\end{aligned}$$

et l'inégalité $E_\lambda(v_\lambda)\geqslant\sqrt{2\lambda}F(\eta_\lambda)$ en découle immédiatement.

4. Comme $E_\lambda(u_\lambda)\leqslant E_\lambda(v_\lambda)$, a fortiori $\dfrac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\leqslant C$. Or pour toute fonction bornée g sur $\mathbb{R}_+^*$, par propriété de l'inf on a que la fonction $\lambda_0\mapsto\operatorname*{Inf}_{\lambda\geqslant\lambda_0} g(\lambda)$ est une fonction croissante de λ_0 . Donc, par le théorème de limite monotone, il existe bien

$$\lim_{\lambda\to\infty}\operatorname*{Inf}_{\lambda\geqslant\lambda_0}\frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}=\operatorname*{Sup}_{\lambda\to\infty}\operatorname*{Inf}_{\lambda\geqslant\lambda_0}\frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \quad .$$

D'autre part, on peut appliquer le résultat de **3.** à la famille u_λ , avec ici $\eta_\lambda=\mu_\lambda\to 1$ quand $\lambda\to\infty$, d'où $F(\mu_\lambda)\to F(1)=\frac{2}{3}$. Soit $\varepsilon>0$ donné quelconque. Par continuité de F en 1 (à gauche), il existe un $\alpha\in]0,1[$ tel que $1-\alpha<\theta<1\Rightarrow F(\theta)\geqslant F(1)-\varepsilon=\frac{2}{3}-\varepsilon$. Puis, il existe un $\lambda_0>0$ tel que $\lambda\geqslant\lambda_0\Rightarrow 1-\alpha<\mu_\lambda<$. Donc, pour tout $\lambda\geqslant\lambda_0$, on aura par **4.** $\dfrac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\geqslant\sqrt{2}\Big(\frac{2}{3}-\varepsilon\Big)$. Comme l'inf est le plus grand des minorants, a fortiori $\operatorname*{Inf}_{\lambda\geqslant\lambda_0}\dfrac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\geqslant\sqrt{2}\Big(\dfrac{2}{3}-\varepsilon\Big)$, et a fortiori encore, $\lim_{\lambda\to\infty}\operatorname*{Inf}_{\lambda\geqslant\lambda_0}\dfrac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\geqslant\sqrt{2}\Big(\dfrac{2}{3}-\varepsilon\Big)$. Comme ceci est vrai $\forall\,\varepsilon>0$ on en déduit bien $\lim_{\lambda\to\infty}\operatorname*{Inf}_{\lambda\geqslant\lambda_0}\dfrac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\geqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Partie IV

1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à cette équation différentielle du second ordre (déjà vu en **II.2.c**), donc il en existe une unique solution maximale sur un intervalle I ouvert contenant 0 .
Or, en multipliant par ψ' , l'équation implique $-\psi''\psi'=(1-\psi^2)\psi\psi'$, soit l'existence d'une constante C telle que $\forall\,x\in I\quad -\psi'^2=-\frac{1}{2}(1-\psi^2)^2+C$. Or, vu la condition en $x=0$, on a $C=0$, et on cherche donc une solution de $\psi'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\psi^2)$ (le signe étant choisi pour respecter la condition initiale sur $\psi'(0)$).
Réciproquement, toute fonction deux fois dérivable vérifiant l'équation précédente vérifie l'équation initiale sur tout intervalle sur lequel sa dérivée ne s'annule pas. En menant le calcul sur le plus grand intervalle sur lequel ψ reste comprise strictement entre -1 et 1 on trouve $\psi(x)=\operatorname{th}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.
La solution ainsi trouvée est définie sur $\mathbb{R}$, ce qui est bien sûr son intervalle maximal de définition.
Par propriété de la fonction th , on a bien $\psi(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}1$.

ψ_ε que les deux intégrales $\int_0^{1/2}(1-\psi_\varepsilon^2)^2$ et $\int_{1/2}^1(1-\psi_\varepsilon^2)^2$ sont égales. Enfin, en appliquant le changement de variables $u = \dfrac{x}{\varepsilon\sqrt{2}}$, on a que

$$\int_0^1 (1-\psi_\varepsilon^2)^2 = 2\times\int_0^{1/2}\frac{dx}{\mathrm{ch}^4\left(\dfrac{x}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)} = 2\sqrt{2}\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}}\frac{du}{\mathrm{ch}^4 u} \quad ,$$

d'où finalement $E_\lambda(\psi_\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\lambda\right)\times\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}}\frac{du}{\mathrm{ch}^4 u}$.

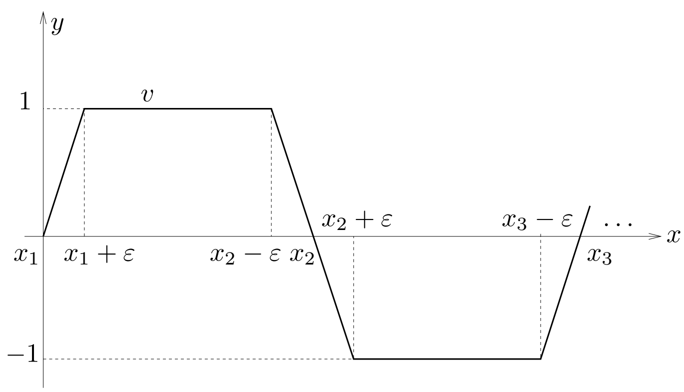
Or, par le changement de variables $v = \mathrm{th}\,u$, $dv = \dfrac{du}{\mathrm{ch}^2 u}$, on voit que quand $\varepsilon\to 0$,

$$\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}}\frac{du}{\mathrm{ch}^4 u}\longrightarrow\int_0^\infty\frac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon}\frac{du}{\mathrm{ch}^4 u} = \int_0^1(1-v)^2\,dv = \frac{2}{3} \quad .$$

Donc, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $\dfrac{E_\lambda(\psi_\varepsilon)}{\sqrt{\lambda}}$ tend, par valeurs inférieures, vers $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Comme ψ_ε est toujours dans $\mathcal{D}_0$, on a $\dfrac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\leqslant\dfrac{E_\lambda(\psi_{1/\sqrt{\lambda}})}{\sqrt{\lambda}}\leqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, et ceci pour tout $\lambda = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\geqslant 4$. Mais on a vu en **III.4** l'inégalité inverse à tout $\varepsilon>0$ près pour $\lambda\geqslant\lambda_0$ assez grand, donc finalement, on a bien que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3.

3.a Appelons δ le minimum des $x_n - x_{n-1}$, $1\leqslant n\leqslant N$. Pour $\varepsilon<\dfrac{\delta}{2}$, on peut construire une fonction v comme dans la partie **II.**, mais avec des signes alternés :



Le calcul de $E_\lambda(v)$ se fait exactement comme au **II.**, il répète $(N-1)$ fois le même calcul (puisque celui-ci ne dépend que des intervalles, toujours de même largeur ε , où l'intégrande est non constante). Donc, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$, on obtient, pour $\lambda>\dfrac{4}{\delta^2}$ une fonction U_λ vérifiant les conditions requises (avec une constante C égale à $(N-1)$ fois la constante obtenue au **II.**). Pour $\lambda\leqslant\dfrac{4}{\delta^2}$, la fonction $U_\lambda = u_\lambda$ (par exemple) convient.

3.b Appelons z_n les points $z_n = \dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}$, $2\leqslant n\leqslant N$. On utilise la même minoration qu'au **II.2** ainsi qu'une fonction F qui est le prolongement impair à $\mathbb{R}$ de la fonction F définie au **II.3** (cette fonction reste toujours C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie toujours $F'(\theta) = |1-\theta^2|$). En minorant comme au **II.3**, i.e. en utilisant

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n}|U_\lambda'(1-U_\lambda^2)|\geqslant\left|\int_{x_{n-1}}^{z_n}U_\lambda'(1-U_\lambda^2)\right|+\left|\int_{z_n}^{x_n}U_\lambda'(1-U_\lambda^2)\right| \quad ,$$

on trouve une minoration de la forme $E_\lambda(U_\lambda)\geqslant\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\sqrt{2\lambda}|F(z_{n+1})|$. Or, les z_n , en nombre fini, tendent tous vers ± 1 , et comme $|F(\pm 1)| = \dfrac{2}{3}$, le même raisonnement à $\varepsilon>0$ près comme dans **II.4** conduit à

$$\lim_{\lambda_0\to\infty}\ \operatorname*{Inf}_{\lambda\geqslant\lambda_0}\frac{E_\lambda(U_\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\geqslant\frac{2(N-1)\sqrt{2}}{3} \quad .$$

sauf en un nombre fini de points l'égalité $\psi'^2 = \dfrac{1}{\varepsilon^2}(1-\psi^2)^2$, si bien que le calcul de $E_\lambda(\psi_\varepsilon)$ se conduit comme en **2.**
Avec des changements de variables de la forme $u = \dfrac{x - x_{n-1}}{\sqrt{2}\varepsilon}$ on montre que :

$$E_\lambda(\psi_\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \lambda\right)\sum_{n=2}^{N}\int_0^{\frac{z_n - x_{n-1}}{\sqrt{2}\varepsilon}} \frac{dv}{\operatorname{ch}^4 v} \quad .$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ pour $\lambda \geqslant \dfrac{4}{\delta^2}$, on en déduit d'une part que les ψ_ε vérifient les conditions (4) et que d'autre part, compte tenu du **3.b** qui maintenant s'applique, $\dfrac{E_\lambda(\psi_\varepsilon)}{\sqrt{\lambda}}$ tend en croissant vers $\dfrac{2(N-1)\sqrt{2}}{3}$ quand $\lambda \to \infty$.

Remarque : les fonctions $\psi = \psi_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ ci-dessus vérifient, sauf en un nombre fini de points, l'équation différentielle (6) du **II.2.c**, $-\psi'' = \lambda(1-\psi^2)\psi$, pourtant elles réalisent une limite asymptotique de $\dfrac{E_\lambda(\psi)}{\sqrt{\lambda}}$ aussi grande que l'on veut, en contradiction avec le résultat du **IV.2** pour la fonction u_λ .
Le caractère C^1 de u_λ, sur lequel semble insister l'auteur du sujet dans le II, est ainsi primordial dans le comportement asymptotique des solutions minimisantes de E_λ.

⁂