ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHS-INFO

CONCOURS INTER-ENS

MEMBRES DE JURYS : A. Darte, G. Schaeffer et P. Weil

Le but du problème était d'étudier les premières propriétés, combinatoires, algorithmiques et algébriques, des groupes libres de type fini. Les groupes libres étaient définis par leur représentation par des mots réduits (parties 2 et 3), on établissait que deux bases d'un même groupe libre ont le même cardinal (partie 4), définissant ainsi le rang du groupe libre, puis on examinait un algorithme pour résoudre le problème de la conjugaison (partie 5). Les parties 6 et 7 concernaient la représentation des sous-groupes de type fini d'un groupe libre et l'on étudiait dans la partie 8 deux représentations classiques des groupes libres, par des groupes de matrices et par des groupes de séries formelles.
Un des ressorts principaux du problème était l'usage de mots pour représenter les éléments d'un groupe libre et un certain nombre de questions relevaient de la combinatoire des mots. La notion de base d'un groupe libre, qui présente bien des analogies avec les bases des espaces vectoriels, mais aussi des différences marquantes, a dérouté plus d'un candidat.

Remarques générales

Cette année encore, le sujet était long et il n'était pas attendu qu'il soit traité en entier dans le temps imparti. La plupart des candidats n'ont traité que les 5 premières parties, et les parties 7 et 8 n'ont pratiquement pas été abordées. Un(e) candidat(e) qui aurait traité uniquement les 3 premières parties pouvait obtenir une note de 14,8. Les 4 premières parties permettaient (théoriquement !) d'atteindre la note maximale.
Quoique long, le sujet était en revanche globalement plus facile que les années précédentes, avec peu de questions très difficiles. Il y a donc eu très peu de copies blanches ou presque blanches. Dans ce cadre, les correcteurs ont utilisé un barême «de concours», concentré sur les questions les plus difficiles, ou plutôt les plus révélatrices de la compréhension des candidats. Ce type de barême rend les stratégies de grapillage peu efficaces et doit inciter les candidats à se concentrer sur les questions plus difficiles et à faire des démonstrations propres.
Comme tous les ans, les auteurs et correcteurs rappellent le soin à apporter à la rédaction et à la présentation. Les preuves par récurrence, par exemple, doivent être présentées de façon claire (ce qui ne veut pas dire de façon bavarde !), en faisant apparaître l'hypothèse de récurrence, l'initialisation et l'argument clef qui justifie la récurrence elle-même. Un certain nombre de questions qui appellent de façon naturelle une récurrence peuvent aussi être traitées par un raisonnement par itération : dans ce cas, un soin particulier doit être apporté à la preuve de la terminaison de ce raisonnement. Les arguments du type «par une récurrence évidente» doivent être employés avec la plus grande prudence : ils ne sont crédibles que si les points clefs du raisonnement sont mis en évidence, et uniquement dans

les copies dont les auteurs ont démontré auparavant qu'ils savaient rédiger proprement une récurrence, même simple.
La clarté de l'écriture n'est pas non plus anodine : lorsque les i ne peuvent être distingués des j ou les u des v, les candidats prennent des risques !
Rappelons enfin que la note n'est que peu corrélée à la longueur de la copie. La clarté d'une démonstration réside parfois aussi dans sa concision. La notion d'«évidence» est dangereuse à manipuler et devrait toujours être qualifiée («évident car...»). Les assez nombreuses copies qui recopient une question de l'énoncé suivie de leur appréciation («c'est évident») sont mal perçues par les correcteurs.

Questions détaillées

Partie 1. Ces questions très simples, en guise de mise en jambe, avaient pour but de permettre aux candidats de se familiariser avec les notions algébriques fondamentales du sujet. Elles ont été dans l'ensemble très bien traitées.

Partie 2. La plupart des copies se sont essayées à toutes les questions de cette partie. La question 2.1, quoiqu'élémentaire, était le premier exemple d'une question à traiter par une récurrence ou par une itération bien menée. Elle a été plutôt réussie, même si certains candidats commencent déjà à être imprécis. La question 2.2 a été l'occasion des premières erreurs : il fallait raisonner par disjonction de cas, selon la position relative des deux réductions considérées dans un même mot, et un nombre surprenant de candidats ont omis de considérer la possibilité du chevauchement de ces réductions.
La question 2.3 n'était pas triviale, mais elle est apparue comme telle à un grand nombre de candidats qui l'ont évacuée d'une phrase en affirmant qu'elle se traitait comme la précédente. Dommage...
La plupart des candidats ont su donner un algorithme répondant à la question 2.4 et en calculer la complexité. Un bon nombre a même donné un algorithme de complexité linéaire, tel que les auteurs l'avaient espéré. Certains candidats ont donné, plutôt que le pseudo-code demandé, du code CAML. C'est une démarche risquée car ce code est plus difficilement compréhensible. En fait, les candidats devaient, pour cette question, faire la différence entre des détails algorithmiques et des détails d'implémentation. Seuls les premiers étaient demandés ici.

Partie 3. La solution de la question 3.1 reposait essentiellement sur l'unicité établie à la question 2.3. Relativement peu de copies se sont appuyées clairement sur cette unicité. Les autres ont donné des raisonnements souvent verbeux, parfois corrects.
La solution de la question 3.2 ($F(A)$ est commutatif si et seulement si A est un singleton) a souvent été bien vue ; la non-commutativité si A a au moins 2 éléments a été bien argumentée par un contre-exemple ; mais la réciproque a souvent été simplement affirmée,

ou lourdement démontrée, les candidats n'ayant en général pas reconnu le groupe des entiers relatifs sous son déguisement de $F(\{a\})$.
La question 3.3 a été catastrophique pour de nombreuses copies, les candidats ne prenant pas en considération les problèmes posés par la possibilité de simplifications : peu ont compris qu'une démonstration était nécessaire pour affirmer que l'application définie naturellement à partir de l'image des lettres était bien un morphisme, et très peu l'ont effectivement démontré. La question 3.4, qui pouvait s'appuyer formellement sur la précédente mais pouvait aussi être «vue» directement, a été mieux traitée.

Partie 4. Cette partie a été globalement très mal traitée. Son objectif était d'introduire la notion de base d'un groupe libre, de démontrer que deux bases d'un même groupe libre ont le même nombre d'éléments (le rang du groupe libre) et qu'un groupe libre de rang 2 contient des sous-groupes libres de tout rang fini. Il y a évidemment des analogies entre les notions développées ici et les notions classiques d'algèbre linéaire, mais aussi des différences que certaines questions mettaient en évidence. Un grand nombre de candidats ont cependant été déroutés et ont appliqué des «recettes» d'algèbre linéaire sans réfléchir et sans analyser les questions qui leur étaient posées. Là où ces méthodes étaient justifiées (pour démontrer l'existence de l'application linéaire $\hat{\varphi}$ dans la question 4.2.1), relativement peu de copies ont donné un raisonnement clair.

Partie 5. Beaucoup de candidats ont traité, plutôt correctement, des questions de cette partie. La plus difficile était certainement la question 5.3, dont la réciproque a donné lieu à un grand nombre de démonstrations fausses ou incomplètes, mais qui a aussi reçu un certain nombre de réponses satisfaisantes.

Partie 6. Cette partie n'a été abordée que par un petit nombre de copies. Pour celles qui s'y sont essayées sérieusement (c'est-à-dire autrement que dans le cadre d'une irritante stratégie de «grapillage», contrée par un barême adapté), la principale difficulté a été de distinguer les chemins et leurs étiquettes, afin de donner tout son sens à l'hypothèse de réduction du A-graphe Γ. Très peu de copies ont abordé la question 6.6, mais celles qui l'ont fait l'ont plutôt bien fait.

Parties 7 et 8. Ces parties n'ont pratiquement pas été traitées.