
Rapports d'oraux, session 2009

Antoine Amarilli

18 février 2012

Ce document est une compilation de l'ensemble des rapports d'oraux que j'ai rédigés pour la session 2009 des concours. Les épreuves concernées sont celles des concours Polytechnique MP option informatique, Mines-Ponts MP, ÉNS voie I, et, partiellement, Centrale-Supélec MP.

Les fiches présentant les épreuves sont indépendantes les unes des autres, en particulier en ce qui concerne la numérotation des pages. Elles sont ici classées par concours, puis par épreuve, dans l'ordre alphabétique. Chacune comporte une description du sujet qui m'a été posé, retranscrit aussi fidèlement que possible ; certaines incluent également des remarques, des indications, voire une correction.

Ce document comporte probablement de nombreuses erreurs, qu'il s'agisse de la typographie, de l'orthographe, de la grammaire, de la retranscription du sujet ou de sa correction. Si vous en trouvez, je vous remercie de me les signaler.

J'espère que ce document sera utile aux taupins pour la préparation des prochaines sessions d'oraux, et leur souhaite bonne chance.

Sujet

[Trois textes étaient proposés, dont deux qui portaient sur World of Warcraft. Voici celui que j'ai choisi.]

“Das Spiel ist höllisch”

Von Kai Biermann, © ZEIT ONLINE 13.5.2009 - 12:15 Uhr.

World of Warcraft kann seinen Nutzern gefährlich werden. Spieler und Aussteiger berichten, was es bedeutet, in der Welt des Kriegshandwerks zu leben.

Wie bringt man 11,5 Millionen Menschen dazu, in einem virtuellen Universum Monstern hinterherzujagen? Die globale Faszination des Internet-Rollenspiels *World of Warcraft* (WoW) bleibt Nichtspielern ein Rätsel. Und sie wirkt noch sehr viel rätselhafter, fragt man Spieler, was sie dort die ganze Zeit tun. Zumindest am Anfang.

Was also treiben die da? “In WoW geht es zu 99 Prozent darum, immer gleiche Monster zu töten, damit die Spielfigur wieder eine etwas bessere Waffe oder Rüstung bekommt, um etwas stärker immergleiche Monster töten zu können”, schreibt *Seyinphyin*, seit Jahren Spieler und auch Spieledesigner. Seinen Klarnamen möchte der User der ZEIT-ONLINE-Community nicht veröffentlicht sehen, auch weil er findet, dass es “um die Botschaft geht, nicht um den Boten”.

Was aber ist die Botschaft dieses Spiels, in dem die Spieler in kleinen Gruppen umherziehen, um Monster zu besiegen oder Mann gegen Mann gegeneinander kämpfen? Immerhin klingt es ziemlich ermüdend, was *Seyinphyin* über den Weg zu einer guten Ausrüstung berichtet, die Grundvoraussetzung für den Erfolg ist: “Diese Ausrüstung bekommt man nur, wenn man immer und immer und immer wieder Woche für Woche den gleichen Inhalt spielt, bis das Bossmonster endlich das Item droppt (die Waffe etc. fallen lässt), und man unter den zehn, beziehungsweise fünfundzwanzig Anwesenden auch das Glück hat, dass man den Wurf (die Beteiligten würfeln, wer die Trophäe behalten darf) um das Item gewinnt.” Diese Mischung aus notwendiger Beharrlichkeit und purem Zufall führe unter Umständen dazu, dass man beispielsweise ein- bis zweihundert “Greife” töten müsse, um einige Federn sammeln zu können.

Doch wieso spielen so viele Menschen *World of Warcraft*, wenn es so mühsam ist? Um Bedürfnisse zu befriedigen, schreibt *Veil of Ignorance*, ebenfalls ein Ex-Spieler, der lieber anonym bleiben möchte. “emphWoW befriedigt nach meiner Erfahrung vor allem das Bedürfnis, etwas Besseres zu sein als der langweilige Typ, der man in der realen Welt ist.” Es gehe um Status und Anerkennung. Viele spielten es sicher auch wegen der Gemeinschaft oder wegen der Herausforderung, meist aber gehe es darum, bewundert zu werden. Und das werde derjenige mit der besten Ausrüstung, denn die lasse auf tolle Leistungen schließen.

Für diese Bewunderung wird viel Zeit investiert, allerdings in einem sicheren virtuellen Umfeld: “Das Schöne an Spielen ist doch, dass dies dort ohne vernichtendes Risiko erreichbar ist, auch wenn man im RL (Real Life = das reale Leben) eben nur in seinem Büro sitzt”, schreibt *Seyinphyin*.

Es scheint noch einen Aspekt zu geben: das “sehr effiziente Anreiz- und Gratifikationssystem”, wie Nutzer *P.S.Eudonym* es nennt. Immerhin müsse es einen Grund haben, dass der Hersteller *Blizzard* damit zwei Drittel des Marktsegments habe erobern können. *Medecal* schreibt: “Man wird von dem Spiel immer in kleinen Happen belohnt. Es gibt also immer dieses kleine Glücksgefühl, was erreicht zu haben, und man hat immer sofort wieder ein neues Ziel, das man sich selber steckt. Da der Spielinhalt ständig erweitert wird, gehen einem die Ziele allerdings auch nicht aus.”

Doch Belohnungssystem und Aussicht auf Erfolg haben auch einen Gegenpol, der die User antreibt: Angst. Angst, allein zu sein und niedergemacht zu werden, Angst, für den Misserfolg der Gilde verantwortlich zu sein, ja von ihr verstoßen zu werden. Dabei scheint es so viel Kooperation nicht zu geben, Der viel beschworene WoW scheint abzunehmen, je ambitionierter die Allianzen agieren. Ellenbogenmentalität fördere das Spiel und die Haltung “Friss oder stirb”, ist das Fazit der User.

Eine Mutter, die schreibt, sie verliere gerade ihren Sohn an WoW, nennt das Spiel schlicht “höllisch”. Druck und Verhöhnung erfahre ihr Sohn, wenn er dem Clan nicht zur Verfügung stehe, und er sei dabei, deswegen sein Abitur “in den Wind zu schießen”, meint *Mom*. “dieses Spiel knebelt seine Mitspieler und gaukelt ihnen vor, sie seien in ihrer Gruppe sozial, wenn sie im real life darauf pfeifen, Verantwortung für sich, ihr Verhalten, ihr Leben, ihre Freunde, ihre Familie zu übernehmen.”

Dabei gehe es doch letztlich nur darum, Jugendliche durch pseudosoziales Clanverhalten “in ein rein kommerziell aufgebautes Spiel zu verstricken”.

Das bestätigt auch *Seyinphyin*. Nicht umsonst sei WoW so gebaut, dass die allermeisten Spieler das Ziel, das größte Monster nie sehen, schreibt er. Die Aufgaben würden bewusst gestreckt, da sonst niemand Monat für Monat Geld dafür überweisen würde. Die Befriedigung des Hauptbedürfnisses, das Spiel durchgespielt, beendet zu haben, werde absichtlich von *Blizzard* verhindert, “weil sonst der Geldfluss aufhört zu fließen”.

Nicht alle sehen das *WoW*-Universum so negativ. Es liegt nicht am Spiel, wenn ihm jemand verfallt, argumentiert der User *Miarue*. Es sei doch eher eine Frage des Einzelnen und seiner Erziehung, ob er "Prioritäten anständig setzen kann". Ob es nun um *WoW* oder um Fußball gehe. *L.H.* meint, der Umgang mit solchen Spielen sei eine Kulturtechnik, die man zeitaufwendig lernen müsse.

Selbstverständlich gibt es Ursachen, warum jemand süchtig wird. Doch sind gleichzeitig die Anreize sehr stark. Am weitesten kommt, wer sich *WoW* voll und ganz widmet und alles andere dem unterordnet. Sollte also statt der Plakette "12+", also ab 12 Jahre, nicht besser ein Warnhinweis wie "Dieses Spiel kann süchtig machen" auf der Verpackung stehen? "Auf jeden Fall", sagt Klaus Wölfling, Psychologe und Leiter der Ambulanz für Spielsucht an der Uni Mainz. Wölfling fordert, *World of Warcraft* erst an 18-Jährige zu verkaufen. Immerhin würde ja auch niemand ein Kind vor einen Glücksspielautomaten setzen. "Und das Verstärkungssystem ist bei beiden dasselbe."

[Le texte est disponible en ligne à l'adresse <http://www.zeit.de/online/2009/19/wow-spielsucht>, et était proposé tel quel. Aucun passage pour la traduction ou la lecture n'était imposé, mais l'examinatrice m'a demandé de choisir un paragraphe moi-même.]

Remarques

- Chose étonnante, l'examinatrice ne disposait pas d'une copie du texte. C'était en particulier surprenant pour la traduction, puisqu'elle ne pouvait pas vraiment vérifier si ce que je proposais était correct.
- À l'entretien, l'examinatrice m'a demandé (je m'y attendais un peu) si j'avais déjà joué à *World of Warcraft*, ce que j'y avais trouvé d'intéressant, etc. Elle m'a ensuite posé des questions sur les écoles que je visais, et m'a enfin parlé de son fils qui comptait devenir concepteur de jeux vidéos (il suffisait d'acquiescer de temps en temps, cela dit, elle parlait plutôt vite et je suis loin d'avoir compris tout ce qu'elle m'a raconté).

Sujet

[La numérotation des questions est rétablie de mémoire et n'est pas exacte.]

Approximation de la longueur d'une ellipse.

On considère l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dont on note L la longueur. On note $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et $E = \frac{c}{a}$ l'excentricité de l'ellipse.

1. [Questions préliminaires.]

a. Montrer que :

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - E^2 \sin^2(t)} dt \quad (1)$$

b. Calculer L avec Maple. Le résultat littéral fait-il appel à des fonctions usuelles ? Calculer une valeur approchée de L avec 25 chiffres significatifs.

2. On pose $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $\lambda_k = \frac{1}{(2k-1)4^k} C_{2k}^k$.

a. Écrire une fonction Maple calculant les λ_k . Exprimer à l'aide de Maple les λ_i pour $0 \leq i \leq 10$.

b. Exprimer à l'aide de Maple les $g^{(k)}(x)$ pour $0 \leq k \leq 5$.

c. Montrer que pour tout $k \leq 0$, $g^{(k)}(x) = -k! \lambda_k (1 - x)^{-k-1/2}$.

d. Montrer que pour tout $n \leq 0$, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$g(x) + \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k = -(n+1) \lambda_{n+1} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \quad (2)$$

e. En déduire que :

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \right| \leq \frac{x^n}{4^n} C_{2n}^n \quad (3)$$

[Indication donnée à l'oral : étudier les variations de la fonction $t \rightarrow \frac{x-t}{1-t}$.]

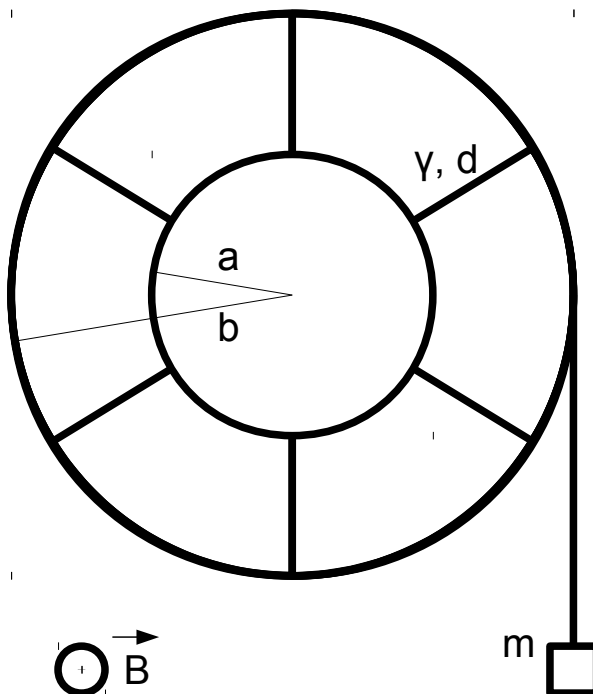
[Il y avait une question 3., qui posait un résultat admis quant à la valeur d'intégrales de Wallis, et utilisait le résultat de 2. pour calculer des valeurs approchées de L avec Maple. Je n'ai pas eu le temps de la traiter.]

Remarques

- Il n'y avait pas besoin d'être un expert de Maple pour traiter cet exercice. Les quelques pièges dans lesquels je suis tombé concernaient, entre autres, la casse : ne pas confondre `int` (qui calcule une intégrale) et `Int` (qui ne fait rien), `Digits` (qui fixe le nombre de chiffres significatifs affichés par `evalf`) et `digits` (qui ne fait rien).
- Lors de la préparation, il n'est guère productif de chercher à faire une question visiblement calculatoire si on est certain de la méthode à employer. Autant la traiter en direct au tableau, et préparer la suite.
- L'indication donnée à l'oral l'était déjà, implicitement, à l'écrit : j'aurais dû me douter que l'écriture alambiquée de l'intégrande servait à nous mettre sur la piste (et non, comme je l'ai pensé, à rallonger inutilement les calculs).

Sujet

On considère une roue formée de deux conducteurs de rayons a et b et de résistance nulle reliés par six barres radiales de diamètre d et de conductivité γ . Les deux conducteurs sont par ailleurs reliés par un fil de résistance nulle. On soumet la roue à un champ $\vec{B}$ constant orienté suivant l'axe de la roue. Une masse m est attachée à un fil enroulé autour de la roue et qui ne glisse pas. La roue tourne librement autour de son axe.



1. Exprimer qualitativement et quantitativement le mouvement du système.
Calculer numériquement la vitesse limite de la masse m pour des valeurs particulières (fournies) des données.
2. Faire un bilan énergétique.

Remarques

- Au vu de mon incapacité totale à résoudre l'exercice, l'examineur m'a demandé, quelques minutes avant la fin de la khôlle, de refaire les rails de Laplace.

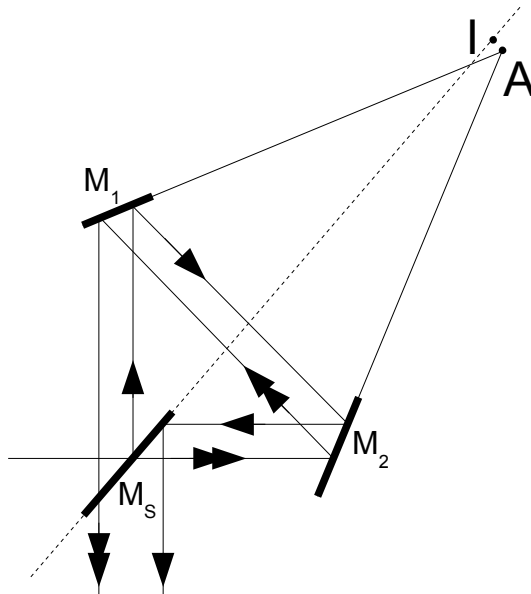
Sujet

Interféromètre de Sagnac.

On considère deux miroirs M_1 et M_2 faisant entre eux un angle de 45 degrés, que l'on étudie dans un plan perpendiculaire à l'arête du dièdre qu'ils forment. On note P un point du plan d'étude situé à l'intérieur du dièdre, et A la trace de l'arête du dièdre dans le plan d'étude. On note P'_1 l'image de P par M_1 , et P'_2 l'image de P'_1 par M_2 .

1. Quelle relation lie $|AP|$, $|AP'_1|$ et $|AP'_2|$? Déterminer l'angle (AP, AP'_2) .

On place entre ces deux miroirs une lame séparatrice M_S de sorte à ce que chaque miroir fasse avec elle un angle approximativement égal à 22,5 degrés. On obtient ainsi un interféromètre.



2. Y a-t-il besoin d'ajouter une lame compensatrice?
3. Déterminer la position des deux sources secondaires S'_1 et S'_2 , et exprimer la distance d qui les sépare en fonction de la valeur a qui vérifie $a^2 = 2AI^2$.
4. Connaissant la longueur d'onde, déterminer la distance d à partir d'un interférogramme affiché sous Maple.

Question à l'oral Que dire de cet interféromètre sur le plan pratique si on le compare au Michelson?

Indications

1. Question sans difficultés si on se souvient du fonctionnement d'un miroir...
2. Se souvenir du fait que la séparatrice n'a qu'une seule face réfléchissante (ie. il n'y a du verre que d'un seul côté). La réponse est non.

Remarques

- Le baratin au début m'a un peu désorienté alors qu'il est inutile pour traiter l'exercice.
- Malheureusement, le fait d'être incapable de traiter des questions difficiles peut empêcher de traiter des questions faciles situées plus loin (ici, la question 4 était très facile mais il était nécessaire de connaître le résultat de la question 3...).

Sujet

Analyse de l'énergie lumineuse fournie par une DÉL et par une ampoule à incandescence.

Le matériel comportait :

- Un banc d'optique ;
- Une DÉL avec résistance de 100 Ohm intégrée ;
- Une ampoule ;
- Un focaliseur (genre de lentille convergente) ;
- Une cellule photopique ;
- Un picoampèremètre déjà relié à la cellule ;
- Une alimentation ;
- Un multimètre à utiliser en ampèremètre ;
- Un oscilloscope (qui semblait uniquement servir ici de voltmètre) ;
- Des câbles (dont certains qui étaient inutiles).

Le fonctionnement des appareils exotiques (focaliseur, cellule photopique, picoampèremètre) était précisé oralement.

I. Étude de la DÉL

1. [Étude préliminaire.]

a. Reliez l'alimentation à la DÉL, en utilisant l'ampèremètre et l'oscilloscope pour mesurer la tension V (aux bornes de l'ensemble formé par la DÉL et la résistance) et l'intensité i_d . Faire un schéma du montage, et le faire vérifier par l'examineur.

b. Pour V entre 0 et 7 V, mesurer le flux lumineux Φ_{opt} (calculable à partir de la valeur indiquée par le picoampèremètre en divisant par une constante donnée par le sujet) et la tension V_d aux bornes de la diode seule (la résistance était intégrée, de sorte qu'on ne pouvait pas faire de mesure séparée ; j'ai utilisé la loi d'Ohm). Présenter les résultats dans un tableau synthétique (les différentes colonnes à fournir étaient indiquées) et expliquer la méthode de mesure.

c. Tracer la caractéristique de la diode $V_d = f(i_d)$ et la courbe $\Phi_{opt} = f(i_d)$. Commentaires ?

2. [Étude approfondie.]

a. Définir la tension de seuil de la DÉL, et la déterminer. Estimer la précision du résultat.

b. Effectuer une régression linéaire pour calculer la résistance de la DÉL en fonctionnement linéaire. Détailler la démarche.

c. Calculer le rendement r , rapport de la puissance lumineuse sur la puissance électrique. Calculer le rendement maximal. Évaluer la précision de cette valeur.

3. On souhaite évaluer l'intensité lumineuse (flux lumineux par stéradian). [Le fonctionnement des angles solides est rappelé.]

a. Placer le capteur à 15 cm de la DÉL et dans l'axe du banc d'optique. Évaluer l'angle solide formé par la cellule (dont la surface est fournie par le sujet).

b. Mesurer le flux lumineux.

c. En déduire le résultat demandé.

II. Étude de la lampe à incandescence

1. [Étude préliminaire.]

a. Faire le même montage qu'en I.1. pour la lampe, et utiliser le condenseur pour récupérer le maximum de lumière. Quel est l'intérêt d'utiliser cette optique ici ? Faire vérifier le montage par l'examineur.

b. Pour V entre 0 et 7 V, mesurer i et Φ_{opt} . Tracer la caractéristique de l'ampoule et la courbe $\Phi_{opt} = f(i)$, les commenter et les comparer à celles de la diode.

c. Calculer le rendement, le rendement maximal.

2. Régler le courant traversant la lampe pour obtenir la même intensité lumineuse que celle fournie par la DÉL avec un courant de 200 mA. Puis, placer la cellule à 15 cm et mesurer Φ_{opt} . Comparer avec la DÉL.

3. Comparer lampe et DÉL (puissance lumineuse, rendement, comportement, directionnalité...). Que pensez-vous de ces deux dispositifs pour l'éclairage quotidien ?

[La numérotation des questions est approximative, le sujet est normalement complet.]

Remarques

- Dans mon cas, le début de l'épreuve n'était pas annoncé et j'ai passé plusieurs dizaines de minutes à attendre inutilement parce que je n'avais pas vu que le sujet était déjà sur la table (il était au dos de la fiche de consignes...). C'est une manière particulièrement bête de perdre beaucoup de temps, alors méfiez-vous...
- Le sujet et l'examinatrice insistaient beaucoup sur la nécessité de faire des mesures d'une manière aussi précise que possible. Les histoires de chiffres significatifs, etc. sont sans doute à garder à l'esprit. Il était aussi demandé d'évaluer la précision de certaines mesures...
- Le degré de connaissance du cours nécessaire varie beaucoup selon les sujets.

Sujet

Langages clos par concaténation.

On dit qu'un langage L est clos par concaténation si $\forall u, v \in L, uv \in L$ et $\epsilon \in L$. On dit alors que $x \in L$ est un générateur si $x \neq \epsilon$ et $(\exists u, v \in L, uv = x) \implies (u = \epsilon \vee v = \epsilon)$, et on note $G(L)$ l'ensemble des générateurs.

1. Soit L un langage clos par concaténation. Montrer que $L = G(L)^*$.
2. Donner un exemple de langage L rationnel et clos par concaténation tel que $G(L)$ soit infini.
3. Un langage L est dit libre s'il existe un alphabet Σ' non nécessairement fini tel qu'il existe un isomorphisme pour la concaténation $\phi : \Sigma'^* \rightarrow L$. Montrer que L est libre si et seulement si $\forall u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \in G(L), (u_1 \cdots u_n = v_1 \cdots v_m \implies (n = m \wedge (\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, u_i = v_i)))$.
4. Montrer que L est libre si et seulement si $\forall w \in \Sigma'^*, (\exists u, v \in L, uw, vw \in L \implies w \in L)$.

[D'autres questions suivraient.]

Corrigé

1. Montrons la double inclusion.

$G(L)^* \subset L$ On a $G(L) \subset L$, et $G(L)^* \subset L$ par une récurrence immédiate car L est clos par concaténation et $\epsilon \in L$.

$L \subset G(L)^*$ Posons $R\{k\} : \forall u \in L, (|u| \leq k \implies u \in G(L)^*)$. On a $R\{0\}$ car $\epsilon \in G(L)$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $R\{k\}$. Soit $x \in L$ tel que $|x| \leq k+1$. Si $x \in G(L)$, alors $x \in G(L)^*$. Sinon, $x \notin G(L)$ permet d'affirmer, par négation de la définition des générateurs, que l'on a soit $x = \epsilon$ auquel cas $x \in G(L)^*$, soit $\exists u, v \in L, (uv = x) \wedge (u \neq \epsilon) \wedge (v \neq \epsilon)$. Ainsi, $|u| < |x| \leq k+1$ (puisque $v \neq \epsilon$) et $|v| < |x| \leq k+1$ (puisque $u \neq \epsilon$). Comme $u, v \in L$, on a donc d'après l'hypothèse de récurrence que $u, v \in G(L)^*$. De ce fait, comme $x = uv$, $x \in G(L)^*$. D'où $R\{k+1\}$. Ainsi, par récurrence, $L \subset G(L)^*$.

2. Soit $L = (a^*b)^*$. L est par définition rationnel, et il est trivialement clos par concaténation. Montrons que $G(L) = a^*b$, qui est infini.

$a^*b \in G(L)$ Soit $w \in a^*b$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $w = a^n b$. On a clairement $w \neq \epsilon$. Supposons qu'il existe $u, v \in L$ tels que $w = uv$. Alors, comme $|w|_b = |u|_b + |v|_b$ et $|w|_b = 1$, on a $(|u|_b = 0) \vee (|v|_b = 0)$. Mais le seul mot $x \in L$ vérifiant $|x|_b = 0$ est le mot vide, d'où $(u = \epsilon) \vee (v = \epsilon)$. Donc $w \in G(L)$.

$G(L) \in a^*b$ Réciproquement, soit $w \in L \setminus (a^*b)$. On a soit $w = \epsilon$, auquel cas w n'est pas générateur, soit l'existence de $k > 1$ tel qu'il existe $u_1, \dots, u_k \in a^*b$ tels que $w = u_1 \cdots u_k$. Mais les u_i sont non vides puisque $\epsilon \notin a^*b$, et ils sont dans L par définition de L . Ainsi, en prenant $u = u_1$ et $v = u_2 \cdots u_k$, il est clair que $w = uv$ n'est pas générateur. D'où le résultat voulu.

3. Montrons les deux implications.

$\implies$ Supposons que L soit libre. Ainsi, il existe de tels Σ' et ϕ . Soient de tels u_i, v_i . On a alors $\phi(u_1 \cdots u_n) = \phi(v_1 \cdots v_m)$, d'où $\phi(u_1) \cdots \phi(u_n) = \phi(v_1) \cdots \phi(v_m)$.

Or, on a $\forall x \in G(L), \phi^{-1}(x) \in \Sigma'$. En effet, on ne peut avoir $\phi^{-1}(x) = \epsilon$ puisque $x \neq \epsilon$ et que ϕ^{-1} est injectif, donc il existe $a_1, \dots, a_k \in \Sigma'$ tels que $\phi^{-1}(x) = a_1 \cdots a_k$ soit $x = \phi(a_1) \cdots \phi(a_k)$. Mais les a_i sont des lettres de Σ' donc elles sont différentes de ϵ , et ainsi $k = 1$ car dans le cas contraire, x ne peut être générateur (prendre $u = \phi(a_1), v = \phi(a_2) \cdots \phi(a_k)$).

Ainsi, on a $n = m$, et $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \phi(u_i) = \phi(v_i)$ en identifiant lettre à lettre dans l'égalité $\phi(u_1) \cdots \phi(u_n) = \phi(v_1) \cdots \phi(v_m)$, d'où le résultat en exploitant le caractère bijectif de ϕ .

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons le résultat sur les éléments de $G(L)$, et montrons que L est libre. Soit Σ' un alphabet en bijection avec $G(L)$ (c'est-à-dire dénombrable comme lui, et de même cardinal que lui s'il est fini). Notons χ une bijection entre Σ' et $G(L)$ (en définissant ce faisant une notation pratique pour les lettres de Σ' , suggérée par l'examineur) :

$$\chi : \begin{array}{ccc} \Sigma' & \longrightarrow & G(L) \\ a_g & \longmapsto & g \end{array}$$

Définissons à partir de χ un morphisme pour la concaténation :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \Sigma'^* & \longrightarrow & L \\ a_{g_1} \cdots a_{g_n} & \longmapsto & g_1 \cdots g_n \end{array}$$

L'image de ϕ est clairement $G(L)^*$, c'est-à-dire L par application de la question 1, donc ϕ est surjectif.

Par ailleurs, montrons que ϕ est injectif. Soient $x, y \in \Sigma'^*$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$. Écrivons $x = a_{g_1} \cdots a_{g_n}$, $y = a_{h_1} \cdots a_{h_m}$. On a donc $g_1 \cdots g_n = h_1 \cdots h_m$, et les g_i, h_i sont des éléments de $G(L)$. Ainsi, par application de l'hypothèse faite sur $G(L)$, $x = y$. D'où le caractère injectif de ϕ .

L'application ϕ est donc un isomorphisme pour la concaténation, et L est libre.

Sujet

China thinks twice – and its 300m internet users scent a rare victory.

For the netizens of the world's biggest online community, it was a rare victory. At the 11th hour, and with no proper explanation, the Chinese government, the most assiduous internet censor on the planet, engineered a sudden climbdown. Instead of proceeding with plans to transform its notorious Great Firewall internet censor with new tools known as Green Dam, the authorities desisted. [...] The plan to bundle the software into every new computer in China had provoked an unprecedented wave of online opposition, protests by foreign governments and calls by prominent bloggers for Chinese netizens to climb, attack and demonstrate against the "Great Firewall". China insists the software is necessary to clear the Chinese web of "harmful content". But critics say it is a misguided attempt to put the internet genie back in the bottle by a Communist party with about 300 million netizens to answer to.

But this was just a small victory in a larger war. The tools have been shelved temporarily, not scrapped. Wen Yuchao, a journalist and blogger who goes by the online name North Wind, cautioned against overoptimism. "I am happy at this news, but this is just an interim victory – we still have a long way to go in the struggle. It remains to be seen whether the authorities will press ahead." The mini-victory for advocates of internet freedom has a wider resonance in a world where internet censorship is becoming something of a fad. Dozens of countries deploy tactics to filter, block or choke off internet access for their citizens.

When the web was in its infancy, a nascent hope was kindled that the technology would help roll back authoritarianism. Two decades later, it often appears the reverse is true: that the authoritarians are rolling back the internet. Examples stand out almost every week. Last week, Kazakhstan introduced a new law to regulate forums, chats, blogs, and even online shops. Last month, the German parliament voted through internet censorship architecture which, though aimed at child pornography, has aroused concern that it could be used to tackle other content. Elsewhere, Turkey has blocked access to YouTube for more than a year. Several Middle Eastern and Central Asian countries maintain tight control over what websites are available.

Iran has, moreover, offered a sobering study in how the authorities can turn censorship on and off like a tap. Filtering has become much heavier in the last fortnight. Some users have reported speeds of less than a tenth of normal operations. Crucially, all internet traffic in and out of Iran travels through one portal – the Telecommunications Company of Iran (TCI) – though a few service providers operate below it. This makes it easier to monitor traffic. Sophisticated software allows officials to look at a website or tweet and see the IP address it came from. Decisions on blocking are made by a committee of government officials, members of the judiciary and intelligence services. Filtering is done by the telecommunications ministry. Another method used by the state is deliberately to reduce bandwidth to prevent the transmission of mobile phone-recorded video. Still, that did not stop the world seeing the now iconic 40-second film of Neda Soltan bleeding to death on a street in Tehran.

The Chinese climbdown offers a first glimpse of the netizens hitting back. As late as yesterday afternoon, information ministry officials denied the software would be delayed, but the authorities have been struggling to meet their deadline to roll out the image and keyword filter, which blocks pornographic, violent and politically sensitive content and monitors behaviour. It was unclear whether the reversal was an administrative failure or a change of heart in the government, which has been embarrassed by the backlash. The US government called on China to abandon the plan. The European Chamber of Commerce co-signed a letter last week to prime minister Wen Jiabao that expressed concerns about the implications for internet security, trade and freedom of expression. But the fiercest opposition was online.

[Le texte était adapté de *China delays Green Dam internet filter* à l'adresse <http://www.guardian.co.uk/world/2009/jun/30/censorship-china-internet-software> avec des coupes (que j'ai rétablies et indiquées, mais elles ne l'étaient pas sur le sujet) et des réagencements de paragraphes. L'auteur n'était pas indiqué.]

Remarques

- Les consignes sont rappelées sur le document *et* sur une étiquette apposée sur la table ; les deux versions sont contradictoires. Je crois que c'est celle du document qui est la bonne.
- Il faut commencer la khôlle par la lecture d'un passage du texte, et en choisir un soi-même si aucun n'est spécifié. (Cf. le rapport de jury.)
- On ne m'a pas proposé de choisir entre texte « de société » et texte « scientifique ».
- Les consignes spécifient explicitement qu'il est inutile de rappeler la date de publication, la source ou le nom de l'auteur, et qu'il faut plutôt présenter le sujet du document.

- La khôlle a suivi le schéma classique, je n'ai pas été interrompu, et les questions de l'examinatrice portaient sur mon commentaire.

Sujet

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On note $||| \cdot |||$ la norme triple découlant de la norme $\| \cdot \|_2$ euclidienne classique. Montrer que $||| \exp(A) - \exp(B) ||| \leq ||| B - A ||| \exp(\max(||| A |||, ||| B |||))$.

Indications

- Malheureusement, A et B ne commutent pas.
 - On peut dans un premier temps prendre $B = 0$.
 - Introduire un paramètre t , et utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
-

Remarques

- Ne pas utiliser la norme 2 au carré si cela ne sert à rien.
- Prendre soin de bien gérer son tableau (écrire les choses aux bons endroits, effacer au fur et à mesure et ne pas rester devant) pour ne pas agacer l'examineur.

Sujet

Représentation et analyse du réseau de confiance OpenPGP.

Remarques

- Le jury commence par vous demander une présentation d'environ dix minutes, en prévenant qu'ils vont vous interrompre (et effectivement, c'est le cas). La présentation se transforme très vite en séance de questions-réponses, mais mieux avoir un peu préparé le début pour avoir une idée de ce que l'on va raconter.
- Il est possible d'utiliser des transparents pour la présentation ou de se contenter du tableau noir.
- Il n'est « pas légal » d'apporter un ordinateur portable pour montrer votre programme au jury.
- Le jury, quoique aimable, n'ira pas par quatre chemins pour vous faire remarquer qu'un algorithme ou un point de votre travail est naïf ou trivial.
- Plutôt que des tableaux de résultats chiffrés, il est préférable d'utiliser des graphiques, plus lisibles.
- Le jury avait visiblement lu mon rapport avant, mais pas dans les moindres détails (puisque la réponse à une bonne partie des questions qu'ils m'ont posées s'y trouvait).
- Le jury est visiblement compétent en informatique, mais pas forcément toujours dans le domaine que vous avez étudié. Ce n'est pas excessivement gênant (car ils comprennent vite), mais cela signifie que les questions qu'ils poseront auront tendance à s'éloigner de votre travail pour en arriver à des concepts d'informatique fondamentale. Dans mon cas, alors que mon travail portait sur l'étude d'un graphe ayant un lien avec la cryptographie, les questions ont porté sur le mécanisme de la cryptographie (alors même que mon rapport indiquait que je ne m'y étais pas intéressé) puis sur la NP-complétude. D'autres questions ont porté sur l'algorithme de Floyd-Warshall, qui constituait une solution alternative (mais moins efficace) pour résoudre un des problèmes que j'avais étudiés.
- Si vous parlez d'une notion hors-programme, attendez-vous à vous faire questionner à son sujet (même si cette notion est visiblement attendue en réponse à une question que l'on vient de vous poser!).
- Il semblerait que, parfois, l'oral se transforme en khôlle sans lien avec votre travail. Cependant, cela n'a pas été mon cas.

Sujet

Réseaux de Petri.

Le sujet sera probablement disponible en ligne bientôt sur le site du concours.

Remarques

- Usez et abusez du u_0 d'exemple fourni pour éviter autant que possible de faire du débogage (car cela prend du temps)... à condition, bien sûr, que les résultats soient assez spécifiques pour écarter la possibilité d'une coïncidence. Cependant, n'attendez pas le dernier moment pour changer de u_0 et utiliser le vôtre ; il se peut que les situations rencontrées soient différentes et donnent lieu à des cas mal gérés par votre programme. Gardez aussi du temps pour recopier les résultats tranquillement afin d'éviter toute erreur.
- Pour l'entretien, focalisez-vous en priorité sur les questions marquées comme « à développer durant l'oral » (plutôt que d'essayer d'anticiper toutes les questions bizarres que l'on pourrait vous poser). Gardez en mémoire le fonctionnement de vos algorithmes et les structures de données que vous avez utilisées.

Sujet

Texte sur le féminisme, et sur le rapport entre héroïsme et vie de famille, introuvable sur Internet.

Remarques

- S'assurer de bien utiliser le dictionnaire fourni, y compris pour les noms propres. Dans mon cas, l'entretien commençait par une vérification s'assurant que je comprenais bien les mots ardues du texte et les noms mentionnés. Pour certains, j'en étais même à lire des informations que j'avais recopiées du dictionnaire sur mon brouillon. Fort heureusement, l'examinatrice semblait aussi consciente que moi de la stupidité de l'exercice.

Sujet

Putting one's sock in it

If Charles is ever to be king, he must learn from his mother that restraint, not opinion, is required.

Geoffrey Wheatcroft, The Guardian, Friday 14 November 2008.

When the last Prince of Wales inherited (briefly and unhappily) as Edward VIII, he was a mere 41. But when the penultimate prince became Edward VII in 1901 he was already in his 60th year, by when he wisely confined himself to public ceremony and private pleasure. Those memories will weigh on our own heir to the throne as he marks his 60th birthday today. His grandmother, the Queen Mother, lived to be 101; and if the Queen, now a sprightly 82, shows that kind of stamina, the Prince of Wales could be nearing 80 himself before he becomes king - if he does.

Not everyone wants him to. "Prinnie" divides opinion. There is a rather embarrassing "Prince of Wales's party" whose unlikely members, from Trevor Phillips to Melvyn Bragg to Clive James, are wheeled out from time to time to defend their chum. Even unlikelier was an effusion yesterday from Bruce Anderson extolling this "renaissance prince", a man whose "claim to the status of a unique eminence in public intellectuality is irrefutable", and much more of the same. My own invitation to tomorrow night's birthday party at Highgrove went astray in the post, but there's still time for Bruce to receive his by courier.

Some of us also have a soft spot for the prince, not so much for what he says or for the good work of the Prince's Trust as for what he is. If nothing else Charles is a representative for all awkward, emotionally backward Englishmen who find women, or life, baffling half of the time.

Of course there is a serious case against kingship, but in recent years a rather unconvincing republican movement has come and gone. We are not a very deferential or reverential people any more, but we do still have collective memories, not least of fighting two terrible wars - and that helped explain the outpouring of public emotion at the Queen's golden jubilee or the Queen Mother's funeral.

Any damage the monarchy has suffered lately has more likely been self-inflicted. Those of us who consider ourselves loyal subjects of the House of Hanover have had our loyalty severely strained by some members of the royal family, what with Princess Pushy and Prince Hooray. Even then, as the young princes break all records for clubbing and piss-ups, remember that the royals do have a long record of active service, from the Duke of Edinburgh as a young naval officer at Cape Matapan in 1941, to the Duke of York in the Falklands, to Prince Harry in Afghanistan.

Compare that with a Labour government of more than 100 people, not one of whom has ever worn uniform - let alone heard the proverbial shot fired in anger - but who delight in sending others to kill and be killed in needless and illegal wars. This is not a comparison from which our politicians emerge favourably.

Another difficulty is of the Prince of Wales's own making: his enthusiasm for public debate on ill-chosen ground. Dick Taverne, the Lib Dem peer, has denounced him for this, although it was ironic that Taverne's strictures should have appeared in these pages. On subjects such as architecture or hunting, Prinnie's views might be called "Telegraph", but he is much more "Guardian" when it comes to the Middle East, Islam - or GM crops, where Taverne is an ardent enthusiast and the prince, like a number of our writers, is a sceptic.

Right or wrong, Charles might be unequipped for the polemics in which he engages. "I defy anyone to read him," says Anderson, "without acknowledging intellectual and moral depth." But others have done just that. The late James Lees-Milne was a snobbish, tetchy dilettante, and a dazzlingly perceptive diarist. He very much liked the prince - "a sweet man. Heart bang in the right place" - and yet saw that he was "not very clever in spite of praiseworthy intentions. Lays himself open to criticism because he contends with intellectuals and specialists in fields of which he can inevitably have only superficial knowledge."

If he does become king he will have to learn to put a royal sock in it, like his mother. The secret of the Queen's success is that she has never expressed any personal opinion in public (except to ask the other day, on behalf of all of us, "Why did nobody notice" the financial crisis coming). Being a constitutional monarch is a tricky role that requires restraint and discretion. They might just come with riper years; so many happy returns and the best of luck.

[Source : <http://www.guardian.co.uk/commentisfree/2008/nov/14/prince-charles-60th-birthday-monarchy>.]

Remarques

- S'assurer de bien connaître les membres de la famille royale, leurs surnoms, les scandales associés, etc.

Sujet

Texte sur le développement des magasins discount en Allemagne à cause de la crise.

Remarques

- Examineur fort sympathique. L'entretien consistait principalement à l'écouter parler (très vite), à acquiescer, et à marmonner de temps à autre quelque chose lorsqu'il pose une question (pour s'entendre dire "Ja, sie haben recht." et le voir se lancer à nouveau dans un monologue).

Sujet

Exercice 1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, soit $c > 0$. On suppose que pour tous i et j , $|a_{i,j}| \leq c$. Montrer que $|\det A| \leq c^n n^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 2 Soit $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$. Démontrer que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$. Étude et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$.

Indications

Exercice 1 C'est une application de l'inégalité de Hadamard.

Sujet

Exercice. On considère un câble coaxial idéal (infini, armatures parfaitement conductrices, milieu entre armatures (μ_0, ϵ) parfaitement isolant). L'âme est parcourue par des courants surfaciques j_s et porte une charge surfacique σ ; on note I le courant total (et $-I$ le courant total sur l'autre armature).

Formulaire [à vérifier] :

$$\text{r\^ot}(E \cdot \vec{e}_r) = \frac{dE}{dz} \vec{e}_\theta \quad (1)$$

$$\text{r\^ot}(B \cdot \vec{e}_\theta) = -\frac{dB}{dz} \vec{e}_r \quad (2)$$

1. Dans le cas d'un régime permanent (σ et j_s ne dépendant pas du temps ou de z), calculer $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en tout point.
2. Montrer que cette expression reste valable si j_s et σ vérifient une équation d'Alembert.
3. Dans le cas où $j_s = j_0 e^{i(\omega t - kx)}$, calculer σ , $\vec{E}$, $\vec{B}$, et les relier. Remarquer que l'on obtient une structure d'onde. Quelles en sont les caractéristiques ?
4. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. En déduire la puissance maximale transportée par le câble, et son impédance caractéristique.

Question de cours. On considère $H = \frac{jx/Q}{1+x^2+jx/Q}$, où $x = \omega/\omega_0$. Tracer le diagramme de Bode asymptotique, donner l'allure du diagramme réel, et indiquer un montage permettant d'obtenir cette fonction de transfert. Déterminer la réponse pour l'entrée $v_e = E_0 \cos^2(\omega_0 t/2)$.

Indications

Exercice.

- Pour le calcul de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$, s'assurer que l'on sait justifier qu'ils sont nuls à l'extérieur (car la charge totale, le courant total est nul). Ne pas se méprendre sur les symétries (ne pas confondre symétrie pour les charges et symétries pour les courants). Ne pas confondre j_s le courant surfacique et j le courant volumique, connaître leurs unités et savoir justifier les liens entre I , j , j_s ...
- Pour la question 2, la méthode à suivre, que l'examineur m'a indiquée assez rapidement, était très surprenante : supposer que les expressions de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ restent valables hors régime permanent, et en déduire des conditions nécessaires sur j_s et σ en écrivant que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère (exprimer $\text{r\^ot} \vec{E}$ et $\text{r\^ot} \vec{B}$ à l'aide des équations de Maxwell et du formulaire, écrire l'égalité entre les deux formes, et dériver une fois de plus chaque équation en utilisant Schwarz).
- Pour le calcul de σ , les constantes d'intégration sont nulles, paraît-il.
- L'onde obtenue est transverse électrique magnétique, et elle est plane.
- J'ai fait l'étude sans poser le vecteur de Poynting complexe.
- On calcule Poynting, et on détermine la puissance maximale transmise par le câble en intégrant Poynting entre les deux armatures (attention, Poynting dépend de r , attention aussi à ne pas intégrer entre 0 et la deuxième armature car l'intégrale diverge). Je n'ai pas su dire comment en déduire l'impédance caractéristique; l'examineur m'a proposé une formule, j'ai acquiescé servilement sans l'avoir ni comprise, ni retenue. Heureusement, on est passé à la suite.
- Les derniers résultats étaient moches, et suspects. Cependant, l'examineur n'a pas eu l'air de s'en formaliser, ou même de chercher à les vérifier.

Question de cours.

- Avant de se ruer sur le calcul du module et l'étude à hautes, basses fréquences etc., prendre le temps de reconnaître la fonction de transfert d'un passe-bande, et le dire. Distinguer les deux allures possibles selon la valeur de Q .

- Pour le montage, je n'étais plus sûr que le RLC parallèle convenait ; l'examineur m'a donc demandé de le vérifier par une étude à hautes et basses fréquences (classique) et à la fréquence $\sqrt{L/C}$. Ne pas se retrouver désemparé face à des circuits avec des interrupteurs ouverts etc., se rappeler qu'il n'y a pas de courant...
 - Pour l'entrée particulière, il faut linéariser, et non pas chercher à trouver une équation différentielle avec $j\omega$ ou bien parler de notation complexe (pour un signal non sinusoïdal, quelle horreur !). Bien se souvenir aussi que la réponse s'obtient linéairement à partir du comportement pour chacune des harmoniques... En fait, on se retrouve avec une harmonique à la fréquence ω_0 (qui passe telle quelle, le gain vaut 1) et une composante continue (coupée par le filtre).
-

Remarques

- 15 minutes de préparation, et j'ai la nette impression d'être passé 55 minutes sinon plus. Pourtant, l'examineur était déjà en retard avant de me prendre...
- L'exercice était fourni sur une petite fiche manuscrite, et l'examineur l'a reprise au moment de me faire passer. Il m'a certes assuré qu'il me redonnerait ce dont je pourrais avoir besoin, mais ce n'était guère pratique... Si la préparation n'est guère fructueuse, assurez-vous tout de même de mémoriser les schémas, les notations, les questions...

Sujet

Sujet sur la méthode des éléments finis dans le cas d'une équation de Poisson d'ordre 2 et de dimension 1, qui démontrait l'inégalité de Poincaré (précédée de deux lemmes et de définitions sur les espaces de Hilbert), énonçait sans démonstration le théorème de Lax-Milgram, puis présentait la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies (qui donnait ici le même résultat) et des courbes expérimentales pour mesurer l'erreur commise.

Remarques

- L'inscription en ligne deux jours avant l'épreuve obéit à une règle inattendue : les créneaux sont attribués séquentiellement au fil des inscriptions. Mieux vaut donc ne pas s'inscrire trop tôt si vous ne désirez pas, comme moi, obtenir l'alléchant horaire de six heures quarante-cinq...
- Les questions posées sur l'ADS (en maths) peuvent porter sur la définition de certains des termes de l'article, la démonstration de certains lemmes, la compréhension de l'intérêt de certains concepts, et la perception de ce qui fait marcher les choses.
- Les questions posées sur le TIPE portent sur certains points de la présentation qui n'ont pas été compris, ou visent à clarifier la nature de l'apport personnel effectué, ou à demander si certaines autres pistes ont été explorées.
- Les présentations doivent durer précisément dix minutes. Les examinateurs vous avertissent à l'aide d'un panneau lorsqu'il ne vous reste plus que deux minutes.

Sujet

“L’ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien”, Michel Collet, in *Revue de Mathématiques Spéciales*, Mars 1988. L’article est inclus en annexe, et est disponible à l’adresse [http://lg_vidiani.club.fr/articles/ens\(premiers\)%20est%20diophantien%20RMS%20mars%2019880001.pdf](http://lg_vidiani.club.fr/articles/ens(premiers)%20est%20diophantien%20RMS%20mars%2019880001.pdf). Quelques morceaux de l’introduction avaient été effacés, et la source n’était pas indiquée.

Remarques

- L’examineur peut demander des précisions sur le texte, mais demande surtout de refaire des constructions plus ou moins analogues à celle de l’article dans des cas simples, à étudier des cas particuliers. Il y a aussi des questions sur le but de l’article, sur ce qui fait marcher les choses.
- Si vous mentionnez des points hors-programme ou complexes, attendez-vous à ce que l’examineur vous pose des questions pour voir à quel point vous les maîtrisez.

98^e année (1987-1988)

Mars 1988 - Mensuel n° 7 237

Revue de Mathématiques Spéciales

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien

par Michel COLLET, I.A.-I.P.R. de Mathématiques, Lille,
avec la collaboration de L. G. VIDIANI, professeur de Mathématiques spéciales,
au lycée Carnot de Dijon.

INTRODUCTION.

Le polynôme suivant :

$$(k+2)[1 - (wz + h + j - q)^2 + [(gk + 2g + k + 1) \cdot (h + j) + h - z]^2 + [16(k+1)^3 \cdot (k+2)(n+1)^2 + 1 - f^2]^2 \\ + [2n + p + q + z - e]^2 + [e^3 \cdot (e+2) \cdot (a+1)^2 + 1 - o^2]^2 + [(a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2]^2 \\ + [16r^2y^4 \cdot (a^2 - 1) + 1 - u^2]^2 + [((a + u^2) \cdot (u^2 - a))^2 - 1] \cdot (n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2]^2 \\ + [(a^2 - 1)l^2 + 1 - m^2]^2 + [ai + k + 1 - l - i]^2 + [n + l + v - y]^2 + [p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m]^2 \\ + [q + y(a - p - 1) + s \cdot (2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x]^2 + [z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm]^2]$$

de degré 25, à 26 variables, construit par l'américain James P. JONES, en 1976, ne présente pas que l'intérêt d'utiliser les vingt-six lettres de notre alphabet ! L'ensemble de ses valeurs strictement positives, pour des valeurs entières positives ou nulles de chacune de ses variables est exactement l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

Nous dirons que ce polynôme est une *représentation diophantienne* de $\mathcal{P}$, ou encore, que $\mathcal{P}$ est diophantien.

La construction d'un tel polynôme est relativement simple, et accessible à un bachelier, série C, du temps où l'on enseignait l'Arithmétique en classe Terminale. Tout lecteur mathématicien devrait éprouver un certain plaisir à suivre la démonstration et témoigner une vive admiration aux inventeurs de la procédure mise en œuvre pour l'obtention de ce résultat.

L'étude qui suit n'a pour but que de décrire chacune des étapes du raisonnement. Il s'agit simplement, et sans prétention, d'analyser, en français, deux articles publiés dans la revue : « *American Mathematical Monthly* »,

— Martin DAVIS, *Hilbert's tenth problem is unsolvable*, March 73, pp. 233-269 ;

— James P. JONES, *Diophantine Representation of the set of prime numbers*, June-July 76, 449-464.

Les points forts de la construction sont énoncés sous forme de théorèmes dans la quatrième partie. Le second paragraphe a pour but d'établir des propriétés des solutions de l'équation de Pell, seules celles utiles à cette étude sont signalées, et cette partie ne constitue en aucun cas une étude exhaustive de ces équations. Le paragraphe 3 a

pour objet une application immédiate d'un résultat démontré au paragraphe précédent. En préliminaire, nous établirons une double inégalité qui sera utilisée pour démontrer le théorème P_1 .

Important.

Dans cette étude, toutes les variables (de a à z) prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

§ 1. UNE DOUBLE INÉGALITÉ.

Nous allons établir les résultats suivants :

I. — Pour tous entiers k , n et p satisfaisant à

$$1 \leq k \leq n \leq n^k < p,$$

nous avons

$$0 < \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i < p^{k+1}.$$

II. — En outre, si $(2k)^k \leq n$, alors

$$(R) \quad k! < \frac{(n+1)^k p^k}{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i} < k! + 1.$$

Démonstration :

I. — Puisque $p > 0$, l'inégalité de gauche est triviale.

Pour tout i , $i \geq 0$, nous avons $\binom{n}{i} \leq n^i$ (égalité pour $i = 0$ ou 1) donc

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i \leq \sum_{i=0}^k n^i p^i = \frac{(np)^{k+1} - 1}{np - 1}.$$

Mais, par hypothèse, $n^k < p$, soit $n^k \leq p - 1$, donc

$$n^{k+1} \leq n(p - 1) \leq np - 1,$$

par suite,

$$(np)^{k+1} - 1 < (np)^{k+1} \leq p^{k+1}(np - 1),$$

d'où la double inégalité annoncée.

II. — Montrons d'abord l'inégalité de gauche dans la relation (R).

Nous avons

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i + \binom{n}{k} p^k.$$

Comme $n \geq 2k$, pour i variant de 0 à $k - 1$, les coefficients binômiaux $\binom{n}{i}$ sont croissants et

$$\binom{n}{i} \leq \binom{n}{k-1}$$

pour $0 \leq i \leq k - 1$ et $p^i \leq p^{k-1}$; nous en déduisons

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i \leq k \binom{n}{k-1} p^{k-1} + \binom{n}{k} p^k.$$

Mais, $\binom{n}{i} \leq \frac{n^i}{i!}$, il vient alors

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i \leq \frac{kn^{k-1}p^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{n^k p^k}{k!}.$$

d'où

$$k! \left[\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i \right] \leq k^2 n^{k-1} p^{k-1} + n^k p^k \\ \leq kn^k p^{k-1} + n^k p^k < (k + n^k) p^k$$

et comme

$$(k + n^k) \leq (n + 1)^k,$$

nous en déduisons l'inégalité de gauche.

Montrons à présent l'inégalité de droite dans la relation (R).

Il est clair que

$$\binom{n}{k} p^k < \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i,$$

puisque $k > 0$, donc

$$\frac{(n+1)^k p^k}{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i} < \frac{(n+1)^k}{\binom{n}{k}} = \frac{k!}{(n-k+1) \dots n} \\ \leq \frac{k!}{\left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^k} = \frac{k!}{\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^k}.$$

Mais, $\frac{k}{n+1} < \frac{k}{2^k k^k} = \frac{1}{2^k k^{k-1}} < \frac{1}{k}$ donc

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^k \geq \left(1 - \frac{k^2}{n+1}\right).$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien

De même $\frac{k^2}{n+1} < \frac{1}{2}$ donc

$$\left(1 - \frac{k^2}{n+1}\right)^{-1} \leq 1 + \frac{2k^2}{n+1},$$

d'où

$$\frac{(n+1)^k p^k}{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i} \leq k! \left(1 + \frac{2k^2}{n+1}\right) = k! + \frac{2k^2(k!)}{n+1}$$

et, nous obtenons successivement

$$\frac{2k^2(k!)}{n+1} < \frac{2k^2 k^{k-1}}{2^k k^k} = \frac{k}{2^{k-1}} \leq 1,$$

d'où la relation (R).

Conséquences.

Pour $p = (n+1)^k$, posons

$$h + j = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (n+1)^{ki},$$

il vient

$$k! < \frac{(n+1)^{k^2+k}}{h+j} < k! + 1.$$

Ce dernier résultat sera utilisé dans la démonstration du théorème P_1 , au paragraphe 4.

§ 2. L'ÉQUATION DE PELL P_a .

Nous désignerons par P_a , l'équation diophantienne

$$P_a: X^2 - (a^2 - 1)Y^2 = 1,$$

pour $a \geq 2$. Pour $a = 1$, l'équation P_1 ne présente guère d'intérêt.

Les suites de Lucas.

Pour $a \geq 2$, le nombre $\sqrt{a^2 - 1}$ est irrationnel, et pour tout entier n ,

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = u_n + v_n \sqrt{a^2 - 1}$$

où $(u_n, v_n) \in \mathbb{N}^2$ et cette décomposition est unique.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons, dans cette section,

$$A = \sqrt{a^2 - 1}$$

ainsi

$$u_n + Av_n = (a + A)^n.$$

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et

$$u_0^2 - (a^2 - 1)v_0^2 = 1.$$

Pour $n = 1$, $u_1 = a$, $v_1 = 1$ et

$$u_1^2 - (a^2 - 1)v_1^2 = 1.$$

Admettons cette propriété jusqu'au rang p : pour $0 \leq q \leq p$,

$$u_q^2 - (a^2 - 1)v_q^2 = 1$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien

239

et considérons

$$u_{p+1} + Av_{p+1} = (a + A)^p (a + A) = (u_p + Av_p)(a + A).$$

Il vient

$$u_{p+1} = au_p + (a^2 - 1)v_p$$

$$v_{p+1} = u_p + av_p,$$

d'où

$$u_{p+1}^2 - (a^2 - 1)v_{p+1}^2 = 1.$$

et donc pour $n \geq 0$, (u_n, v_n) est une solution de l'équation P_a .

Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$(u_{n-1} + Av_{n-1})(a + A) = (u_n + Av_n)$$

$$(u_{n-1} + Av_{n-1}) = (u_n + Av_n)(a - A)$$

car $(a + A)(a - A) = 1$, soit

$$u_{n-1} = au_n - (a^2 - 1)v_n;$$

$$v_{n-1} = -u_n + av_n$$

comme

$$u_{n+1} = au_n + (a^2 - 1)v_n;$$

$$v_{n+1} = u_n + av_n$$

$$u_{n+1} = 2au_n - u_{n-1}$$

et

$$v_{n+1} = 2av_n - v_{n-1},$$

d'où les suites de LUCAS :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = a, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} - u_n$$

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 1, \quad \text{et} \quad v_{n+2} = 2av_{n+1} - v_n.$$

Réciproquement, si (X, Y) est une solution de l'équation P_a , puisque $a \geq 2$,

$$(a + A) > 1$$

et il existe un unique entier n tel que

$$(a + A)^n \leq (X + AY) < (a + A)^{n+1},$$

soit

$$u_n + Av_n \leq X + AY < (u_n + Av_n)(a + A)$$

et

$$1 \leq (X + AY)(u_n - Av_n) < (a + A)$$

car

$$(u_n + Av_n)(u_n - Av_n) = 1.$$

Comme

$$(X + AY)(X - AY)(u_n - Av_n)(u_n + Av_n) = 1,$$

$(x, y) = (Xu_n - A^2Yv_n, Yu_n - Xv_n)$ est une solution de l'équation P_a et nous avons les inégalités

$$1 \leq x + Ay < a + A$$

soit

$$1 \leq \frac{1}{x - Ay} < \frac{1}{a - A};$$

$$0 < a - A < x - Ay \leq 1$$

soit

$$\begin{aligned} -1 &\leq -x + Ay < -a + A \\ 1 &\leq x + Ay < a + A \end{aligned}$$

comme $0 \leq 2Ay < A$ et donc $y = 0$, soit $X = u_n$ et $Y = v_n$.

Nous avons établi le théorème :

Théorème.

Les solutions de l'équation diophantienne P_a :

$$X^2 - (a^2 - 1)Y^2 = 1$$

sont engendrées par les suites de Lucas :

$$X : u_0 = 1, \quad u_1 = a \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} - u_n$$

$$Y : v_0 = 0, \quad v_1 = 1 \quad \text{et} \quad v_{n+2} = 2av_{n+1} - v_n.$$

Étude des suites de Lucas.

1° Les suites (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes ($a \geq 2$).

Considérons pour $a \geq 2$, les suites (w_n) définies par w_0, w_1 et

$$w_{n+2} = 2aw_{n+1} - w_n,$$

nous avons

$$\begin{aligned} w_{n+2} - w_{n+1} &= (2a - 1)w_{n+1} - w_n \\ &> w_{n+1} - w_n > \dots > w_1 - w_0 \end{aligned}$$

et donc les suites (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes.

2° Pour tout n , $(2a - 1)^n \leq v_{n+1} \leq (2a)^n$.

Pour $n = 0$, $v_1 = 1$, $(2a - 1)^0 \leq v_1 \leq (2a)^0$.

Pour $n = 1$, $v_2 = 2a$, $(2a - 1)^1 < v_2 \leq (2a)^1$.

Admettons la propriété jusqu'au rang p : $0 \leq q \leq p$:

$$(2a - 1)^q \leq v_{q+1} \leq (2a)^q$$

et considérons

$$v_{p+2} = 2av_{p+1} - v_p$$

Puisque $v_{p+1} > v_p$,

$$v_{p+2} > (2a - 1)v_{p+1} > (2a - 1)^{p+1}$$

De même

$$v_{p+2} < 2av_{p+1} \leq (2a)^{p+1}.$$

Donc, pour $n \geq 0$,

$$(2a - 1)^n \leq v_{n+1} \leq (2a)^n.$$

Les inégalités sont strictes pour $n \geq 2$.

3° Pour tout n , $v_n \equiv n \pmod{a - 1}$.

Nous supposons évidemment $a \geq 2$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est évident. Admettons la propriété jusqu'au rang p :

$$0 \leq q \leq p : v_q \equiv q \pmod{a - 1}.$$

Pour $p \geq 1$, nous avons

$$v_{p+1} = 2av_p - v_{p-1};$$

mais $a \equiv 1$, $v_p \equiv p$ et $v_{p-1} \equiv p - 1 \pmod{a - 1}$, donc

$$v_{p+1} \equiv 2p - (p - 1) = p + 1 \pmod{a - 1},$$

d'où la congruence pour tout n

$$v_n \equiv n \pmod{a - 1}$$

4° Pour $a \geq 2$, $n + 1 + v_n \leq v_{n+1}$.

Pour $n = 0$, $1 + v_0 = 1 \leq v_1$.

Pour $n = 1$, $2 + v_1 = 3 \leq v_2 = 2a$.

Admettons la propriété jusqu'au rang p :
 $0 \leq q \leq p$,

$$q + 1 + v_q \leq v_{q+1}.$$

Pour $p \geq 0$, nous avons

$$v_{p+2} = 2av_{p+1} - v_p,$$

puisque $v_{p+1} > v_p$,

$$v_{p+2} = v_{p+1} + (2a - 1)v_{p+1} - v_p \\ > v_{p+1} + (2a - 2)v_{p+1}$$

et comme $v_{p+1} \geq p + 1$ car la suite (v_n) est strictement croissante,

$$v_{p+2} > v_{p+1} + (2a - 2)(p + 1) \geq v_{p+1} + 2p + 2 \\ \geq p + 2 + v_{p+1},$$

d'où l'inégalité, pour tout n ,

$$n + 1 + v_n \leq v_{n+1}.$$

5° Pour tout entier C , $u_n \equiv C^n + (a - C)v_n \pmod{2aC - C^2 - 1}$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est évident.

Admettons la propriété jusqu'au rang p : pour
 $0 \leq q \leq p$,

$$u_q \equiv C^q + (a - C)v_q \pmod{2aC - C^2 - 1}$$

et considérons

$$u_{p+1} - (a - C)v_{p+1} \\ = 2au_p - u_{p-1} - (a - C)(2av_p - v_{p-1}) \\ u_{p+1} - (a - C)v_{p+1} = 2a[u_p - (a - C)v_p] \\ - [u_{p-1} - (a - C)v_{p-1}] \\ u_{p+1} - (a - C)v_{p+1} = 2aC^p - C^{p-1} \\ \pmod{2a - C^2 - 1}$$

Mais, $2aC^p - C^{p-1} = C^{p-1}(2aC - 1)$ et

$$(2aC - 1) \equiv C^2 \pmod{2aC - C^2 - 1}$$

d'où, pour tout n

$$u_n \equiv C^n + (a - C)v_n \pmod{2aC - C^2 - 1}.$$

En outre si $0 < C^n < a$, pour $n = 0$, ou 1 ,

$$C^n + (a - C)v_n = u_n.$$

Pour $n \geq 2$, $v_n \geq 2a$ et

$$a - 1 < [A - (a - 1)]2a \leq [A - (a - 1)]v_n$$

où $A^2 = a^2 - 1$. Par suite

$$C^n + (a - C)v_n \leq (a - 1) + (a - 1)v_n < Av_n$$

et comme, $Av_n < u_n$, pour tout n ,

$$u_n \geq C^n + (a - C)v_n.$$

Ce résultat sera rappelé sous forme de lemme au moment de son utilisation dans le paragraphe suivant.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien

§ 3. DE L'ÉQUATION DIOPHANTINNE (S) :

$$Z^3(Z + 2)(N + 1)^2 + 1 = X^2, \quad Z \geq 2.$$

Nous pouvons toujours poser $Z = a - 1$, ce qui implique $a \geq 3$. L'équation (S) devient

$$(a - 1)^3(a + 1)(N + 1)^2 + 1 = X^2,$$

soit

$$(a^2 - 1)[(a - 1)(N + 1)]^2 + 1 = X^2,$$

et, en posant $Y = (a - 1)(N + 1)$,

$$X^2 - (a^2 - 1)Y^2 = 1.$$

Nous reconnaissons une équation de Pell dont les solutions sont données par les suites de Lucas :

$$X = u_j, \quad Y = v_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Il existe donc un entier j tel que

$$v_j = Y = (a - 1)(N + 1).$$

Nous avons, de toute évidence

$$v_j \equiv 0 \pmod{a - 1}$$

mais, les termes de la suite (v_j) satisfont à la congruence (propriété 3 des suites de Lucas) :

$$v_j \equiv j \pmod{a - 1}.$$

Par conséquent $(a - 1)$ divise j et $(a - 1) \leq j$.

La suite (v_j) étant croissante,

$$v_{a-1} \leq v_j = (a - 1)(N + 1);$$

mais $(2a - 1)^{a-2} \leq v_{a-1}$, soit

$$(2a - 1)^{a-2} \leq (a - 1)(N + 1).$$

En observant que

$$(2a - 1)^{a-2} = (a - 1 + a)^{a-2} \\ > (a - 1)^{a-2} + (a - 2)(a - 1)$$

il vient

$$(a - 1)^{a-2} + (a - 2)(a - 1) < (a - 1)(N + 1).$$

soit

$$(a - 1)^{a-3} + (a - 2) < N + 1$$

ou encore

$$(a - 1)^{a-3} + (a - 2) \leq N,$$

d'où

$$Z - 1 + Z^{Z-2} \leq N.$$

Conséquences.

Si $Z = 2k$ et $N = n$, ($k \geq 1$) la relation

$$(2k)^3(2k + 2)(n + 1)^2 + 1 = f^2$$

implique

$$2k - 1 + (2k)^{2k-2} \leq n,$$

d'où

$$n \geq (2k)^k.$$

Nous verrons encore trois applications de cette inégalité.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien

241

Rappelons la cinquième propriété des suites de Lucas :

Lemme.

Soit l'équation de Pell

$$X^2 - (a^2 - 1)Y^2 = 1, \quad a \geq 1,$$

$(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les solutions de cette équation. Pour tout entier C , nous avons

$u_n \equiv C^n + (a - C)v_n \pmod{2aC - C^2 - 1}$
et si $0 < C^n < a$, alors

$$0 < C^n + (a - C)v_n \leq u_n.$$

Applications : Soit $n \geq (2k)^k$ pour $k \geq 1$; posons

$$e = p + q + z + 2n$$

et

$$e^3(e + 2)(a + 1)^2 + 1 = o^2.$$

De l'étude de l'équation diophantienne (S), il résulte que

$$e - 1 + e^{e-2} \leq a,$$

soit

$$p + q + z + 2n - 1 + (p + q + z + 2n)^{p+q+z+2n-2} \leq a$$

et donc

$$(p + q + z + 2n)^{p+q+z+2n-2} < a$$

d'où $(n + 1)^k < a$;

$$(p + 1)^n < a \quad \text{et} \quad p^{k+1} < a.$$

Appliquons maintenant trois fois le lemme précédent

1° En substituant k à n et $(n + 1)$ à C :

$$u_k \equiv (n + 1)^k + (a - n - 1)v_k \pmod{2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1}$$

et comme $(n + 1)^k < a$ alors

$$0 < u_k \leq (n + 1)^k + (a - n - 1)v_k.$$

2° En substituant $(p + 1)$ à C :

$$u_n \equiv (p + 1)^n + (a - p - 1)v_n \pmod{2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1}$$

et comme $(p + 1)^n < a$ alors

$$0 < u_n \leq (p + 1)^n + (a - p - 1)v_n.$$

3° En substituant p à C et k à n :

$$u_k \equiv p^k + (a - p)v_k \pmod{2ap - p^2 - 1}$$

$$pu_k \equiv p^{k+1} + p(a - p)v_k \pmod{2ap - p^2 - 1}$$

et comme $p^{k+1} < a$ alors

$$0 < pu_k \leq p^{k+1} + p(a - p)v_k.$$

Nous allons en déduire les expressions de p , q et z .

Calcul de p : Si nous posons

$$u_k = p + (a - n - 1)v_k + b[2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1],$$

nous en déduisons

$$p \equiv (n + 1)^k \pmod{2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1}$$

mais,

$$p < a < 2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1$$

et

$$(n + 1)^k < a$$

donc

$$p = (n + 1)^k.$$

Calcul de q : Si nous posons

$$u_n = q + (a - p - 1)v_n + s[2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1],$$

nous en déduisons :

$$q \equiv (p + 1)^n \pmod{2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1}$$

mais,

$$q < a < 2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1$$

et

$$(p + 1)^n < a$$

donc

$$q = (p + 1)^n.$$

Calcul de z : Si nous posons

$$pu_k = z + p(a - p)v_k + t(2ap - p^2 - 1),$$

nous en déduisons

$$z \equiv p^{k+1} \pmod{2ap - p^2 - 1}$$

mais,

$$z < a < 2ap - p^2 - 1$$

et

$$p^{k+1} < a$$

donc

$$z = p^{k+1}.$$

C'est pour le théorème P_2 que ces résultats sont importants.

§ 4. CONSTRUCTION DU POLYNÔME DE JAMES P. JONES.

C'est à partir du théorème de Wilson, $k + 1$ est premier si, et seulement si, $k + 1$ divise $k! + 1$ que nous donnerons une représentation diophantienne de l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

Théorème P_1 .

Soit k un entier, $k \geq 1$; $k + 1$ est premier si et seulement si il existe 6 entiers : f, g, h, j, n et w tels que

$$(A) \quad [(n + 1)^k + 1]^n = w(n + 1)^{k^2 + k} + h + j$$

$$(B) \quad (n + 1)^{k^2 + k} = (gk + k + g)(h + j) + h$$

$$(C) \quad (2k)^3(2k + 2)(n + 1)^2 + 1 = f^2.$$

Démonstration :

— Les conditions (A), (B) et (C) sont nécessaires. Par hypothèse $k + 1$ est premier. D'après le théorème de Wilson, $k + 1$ divise $k! + 1$, donc

il existe un entier g tel que

$$k! + 1 = (g + 1)(k + 1)$$

soit

$$k! = gk + k + g.$$

L'équation (C) se ramène à une équation de Pell (voir étude de l'équation diophantienne (S)), elle admet donc des solutions n , les équations (A) et (B) s'obtiennent par divisions euclidiennes.

Il est évidemment plus intéressant de montrer que :

— Les conditions (A), (B) et (C) sont suffisantes. La condition (C) étant satisfaite, nous pouvons trouver n tel que

$$n \geq (2k)^k,$$

d'après l'étude de l'équation diophantienne (S). Nous obtenons alors

$$(n + 1)^k + 1 \equiv 1 \pmod{n + 1}$$

donc

$$[(n + 1)^k + 1]^n \equiv h + j \pmod{(n + 1)^{k^2+k}}$$

et

$$0 < h + j < (n + 1)^{k^2+k}$$

et

$$h + j = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (n + 1)^{ki}.$$

D'après la relation (B) :

$$gk + k + g \leq \frac{(n + 1)^{k^2+k}}{h + j} \leq gk + k + g + 1$$

mais, de l'inégalité fondamentale (R) :

$$k! < \frac{(n + 1)^{k^2+k}}{h + j} < k! + 1.$$

Comme $gk + k + g$ et $gk + k + g + 1$ sont deux entiers consécutifs

$$gk + k + g = k!$$

soit

$$k! + 1 = (g + 1)(k + 1).$$

Le théorème de Wilson permet de conclure.

Corollaire.

Soit k un entier, $k \geq 1$; $k + 1$ est premier si et seulement si il existe 9 entiers : f, g, h, j, n, p, q, w et z tels que

- (1) $q = wz + h + j$
- (2) $z = (gk + k + g)(h + j) + h$
- (3) $(2k)^3(2k + 2)(n + 1)^2 + 1 = f^2$
- (a) $p = (n + 1)^k$
- (b) $q = (p + 1)^n$
- (c) $z = p^{k+1}$

La démonstration de ce corollaire est immédiate.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien

Théorème P_2 .

Soit k un entier, $k \geq 1$; $k + 1$ est premier si et seulement si il existe 19 entiers : $a, b, e, f, g, h, j, l, m, n, o, p, q, s, t, w, x, y$ et z tels que

- (1) $q = wz + h + j$
- (2) $z = (gk + k + g)(h + j) + h$
- (3) $(2k)^3(2k + 2)(n + 1)^2 + 1 = f^2$
- (4) $e = p + q + z + 2n$
- (5) $e^3(e + 2)(a + 1)^2 + 1 = o^2$
- (6) $x^2 = (a^2 - 1)y^2 + 1$
- (7') $x = u_n$
- (9) $m^2 = (a^2 - 1)l^2 + 1$
- (10') $l = v_k$
- (12) $m = p + l(a - n - 1) + b[2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1]$
- (13) $x = q + y(a - p - 1) + s[2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1]$
- (14) $pm = z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1).$

Démonstration :

— Les 12 conditions précédentes sont nécessaires. D'après le corollaire du théorème P_1 , si $k + 1$ est premier, nous avons (1), (2) et (3) et nous connaissons les 9 entiers : f, g, h, j, n, p, q, w et z . e est obtenu par (4), (5) détermine a et o . La connaissance de n permet de déterminer x par (7') et y par (6). De même, la connaissance de k permet de déterminer l par (10') et m par (9). Enfin, b, s, t sont déterminés par (12), (13) et (14).

— Les 12 conditions précédentes sont suffisantes. D'après les calculs de p, q et z faits avant le théorème P_1 :

- (4), (5), (9), (10') et (12) impliquent (a) ;
- (4), (5), (6), (7') et (13) impliquent (b) ;
- (4), (5), (9), (10') et (14) impliquent (c).

et, (1), (2), (3), (a), (b) et (c) impliquent $k + 1$ premier, d'où le théorème P_2 .

Il nous reste à modifier les conditions (7') et (10'). Pour ce faire, nous aurons recours au résultat suivant qui caractérise la suite (v_n) solution en y de l'équation de Pell (6).

Nous démontrerons en annexe le lemme suivant :

Lemme.

Étant donné deux nombres entiers a et n , $1 \leq n$ et $2 \leq a$, $y = v_n$ si et seulement si il existe 5 entiers c, d, r, u et x tels que

- (6) $x^2 = (a^2 - 1)y^2 + 1$
- (7) $u^2 = 16(a^2 - 1)r^2y^4 + 1$
- (8) $(x + cu)^2 = \{[a + u^2(u^2 - a)]^2 - 1\} (n + 4dy)^2 + 1$
- (11') $n \leq y.$

Ce résultat étant admis, nous en déduisons le

Théorème P_3 .

Soit k un entier, $k \geq 1$, $k + 1$ est premier si et seulement si, il existe 23 entiers : $a, b, c, d, e, f, g, h, j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, w, x, y$ et z tels que :

- (1) $q = wz + h + j$
- (2) $z = (gk + k + g)(h + j) + h$
- (3) $(2k)^3(2k + 2)(n + 1)^2 + 1 = f^2$
- (4) $e = p + q + z + 2n$
- (5) $e^3(e + 2)(a + 1)^2 + 1 = o^2$
- (6) $x^2 = (a^2 - 1)y^2 + 1$
- (7) $u^2 = 16(a^2 - 1)r^2y^4 + 1$
- (8) $(x + cu)^2 = \{[a + u^2(u^2 - a)]^2 - 1\} \quad (n + 4dy)^2 + 1$
- (9) $m^2 = (a^2 - 1)l^2 + 1$
- (10') $l = v_k$
- (11') $n \leq y$
- (12) $m = p + l(a - n - 1) + b[2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1]$
- (13) $x = q + y(a - p - 1) + s[2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1]$
- (14) $pm = z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1)$.

Démonstration : Compte tenu du lemme précédent, il nous suffit de remarquer que les conditions (6), (7), (8) et (11') sont équivalentes aux conditions (6) et (7') du théorème P_2 , les autres conditions étant inchangées.

Modifions pour terminer les conditions (10') et (11'). L'équation (9) implique d'après (10')

$$m = u_k \quad \text{et} \quad l = v_k.$$

Nous savons que

$$v_k \equiv k \pmod{a - 1}$$

et nous pouvons écrire

$$(10) \quad l = k + i(a - 1).$$

(v_n) est une suite croissante, donc $v_n \geq n$ soit $v_k \geq k$ et $i \geq 0$.

D'autre part, nous avons pour tout n ,

$$n + v_{n-1} \leq v_n$$

comme $k < n$, $l \leq v_{n-1}$ et $n + l \leq y$ soit

$$(11) \quad n + l + v = y.$$

qui implique (11').

Inversement, si les conditions (9), (10) et (11) sont vérifiées, (9) et (11') sont manifestement satisfaites.

D'après la condition (9), nous avons

$$m = u_{k'} \quad \text{et} \quad l = v_{k'}$$

comme d'après (11), $l < y$, alors

$$v_{k'} < v_n \quad \text{et} \quad k' < n.$$

D'après l'étude de l'équation diophantienne (S)

$$k < (a - 1) \quad \text{et} \quad k' < (a - 1)$$

et puisque $l \equiv k \pmod{a - 1}$ mais aussi $l \equiv k' \pmod{a - 1}$,

$$k = k' \quad \text{et} \quad l = v_{k'}$$

c'est la condition (10').

Les conditions (1) à (14) constituent donc une condition nécessaire et suffisante pour que $k + 1$ soit premier.

En substituant $k + 1$ à k dans les conditions (2), (3) et (10) nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème

Soit k un entier, $k \geq 0$; $k + 2$ est un nombre premier si et seulement si il existe 25 entiers : $a, b, \dots, j, l, \dots, x, y$ et z tels que

- (1) $A = wz + h + j - q = 0$
- (2) $B = (gk + 2g + k + 1)(h + j) + h - z = 0$
- (3) $C = 16(k + 1)^3(k + 2)(n + 1)^2 + 1 - f^2 = 0$
- (4) $D = 2n + p + q + z - e = 0$
- (5) $E = e^3(e + 2)(a + 1)^2 + 1 - o^2 = 0$
- (6) $F = x^2 - (a^2 - 1)y^2 - 1 = 0$
- (7) $G = 16(a^2 - 1)r^2y^4 + 1 - u^2 = 0$
- (8) $H = \{[a + u^2(u^2 - a)]^2 - 1\} \quad (n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2 = 0$
- (9) $I = m^2 - (a^2 - 1)l^2 - 1 = 0$
- (10) $J = i(a - 1) + k + 1 - l = 0$
- (11) $K = n + l + v - y = 0$
- (12) $L = p + l(a - n - 1) + b[2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1] - m = 0$
- (13) $M = q + y(a - p - 1) + s[2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1] - x = 0$
- (14) $N = z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm = 0$.

Cette condition peut s'écrire :

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2 + I^2 + J^2 + K^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 0$$

ou encore

$$1 - \sum_{i=A}^N i^2 = 1,$$

et nous concluons : le polynôme

$$P(a, b, \dots, z) = (k + 2) \left(l - \sum_{i=A}^N i^2 \right)$$

de degré 25 à 26 variables, variant dans l'ensemble $\mathbb{N}$, est tel que l'ensemble de ses valeurs positives coïncide avec l'ensemble des nombres premiers.

ANNEXE

Compléments sur les solutions de l'équation de Pell.**Complément C₁**

Soit les équations de Pell :

$$\begin{aligned} P_a: & X^2 - (a^2 - 1)Y^2 = 1, (u_j, v_j) \text{ ses solutions} \\ P_b: & X^2 - (b^2 - 1)Y^2 = 1, (s_j, t_j) \text{ ses solutions} \end{aligned}$$

Si $b \equiv a \pmod{u}$, alors pour tout entier j , $s_j \equiv u_j \pmod{u}$.

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \quad \text{et} \quad u_0 = 1 \quad \text{donc} \quad s_0 \equiv u_0 \pmod{u} \\ s_1 &= b \quad \text{et} \quad u_1 = a \quad \text{donc} \quad s_1 \equiv u_1 \pmod{u} \end{aligned}$$

Les relations de récurrence (suites de Lucas)

$$s_{p+2} = 2bs_{p+1} - s_p$$

et

$$u_{p+2} = 2au_{p+1} - u_p$$

conduisent immédiatement au résultat par récurrence sur p .

Complément C₂

Pour $0 < i \leq k$, si $u_j \equiv u_i \pmod{u_k}$ alors :

$$j \equiv \pm i \pmod{4k}.$$

Démonstration : Comme au paragraphe 2, nous avons :

$$u_{k \pm m} + Av_{k \pm m} = (u_k + Av_k)(u_m \pm Av_m),$$

d'où

$$u_{k \pm m} = u_k u_m + (a^2 - 1)v_k v_m$$

et

$$v_{k \pm m} = v_k u_m \pm u_k v_m$$

soit

— pour $m = k \pm i$,

$$u_{2k \pm i} = u_k u_{k \pm i} + (a^2 - 1)v_k v_{k \pm i};$$

— pour $m = i$,

$$v_{k \pm i} = v_k u_i \pm u_k v_i$$

et

$$u_{2k \pm i} = u_k u_{k \pm i} + (a^2 - 1)v_k(v_k u_i \pm u_k v_i)$$

donc

$$u_{2k \pm i} \equiv (a^2 - 1)v_k^2 u_i \pmod{u_k}.$$

Comme, $(a^2 - 1)v_k^2 = u_k^2 - 1 \equiv -1 \pmod{u_k}$

$$u_{2k \pm i} \equiv -u_i \pmod{u_k}.$$

Par conséquent

$$u_{4k \pm i} = u_{2k + (2k \pm i)} \equiv -u_{2k \pm i} \equiv u_i \pmod{u_k}$$

et pour tout entier p , $p \geq 1$,

$$u_{4pk \pm i} \equiv u_i \pmod{u_k}$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien

Pour prouver le résultat C₂, il suffit donc de montrer que pour $j \leq 2k$, si $u_j \equiv u_i \pmod{u_k}$, alors $j = i$.

Remarquons alors que si $p + q = k$,

$$u_{k+p} = u_{2k-q}$$

et

$$u_{k+p} \equiv -u_q \pmod{u_k}.$$

Nous savons que la suite (u_n) est strictement croissante, et que pour tout n ,

$$2u_{n-1} < u_n,$$

(exception pour $a = 2$ et $n = 1$), par conséquent, modulo u_k , les classes de $-u_{k-1}, -u_{k-2}, \dots, -u_0, u_0, \dots, u_k$ sont distinctes deux à deux, de même que les classes de $u_0, u_1, \dots, u_{2k-1}, u_{2k}$ et donc, si $j \leq 2k$, alors $j = i$, d'où le résultat.

Complément C₃

Si v_i^2 divise v_k , alors v_i divise k .

Démonstration :

Scolie : v_i divise v_k si et seulement si i divise k . Manifestement, pour $i \neq 0$, v_i divise v_i . Comme

$$v_{i(q+1)} = v_{i+qi} = v_i u_{qi} + u_i v_{qi},$$

un raisonnement par récurrence sur q montre que la condition est suffisante.

Inversement, si v_i divise v_k , posons

$$k = qi + r, \quad 0 \leq r < i,$$

alors

$$v_k = u_r v_{qi} + u_{qi} v_r$$

Comme, v_i divise v_k et v_{qi} , v_i divise $u_{qi} v_r$, mais, u_{qi} et v_{qi} sont premiers entre eux, donc v_i et u_{qi} sont premiers entre eux (car v_i divise v_{qi}) et par conséquent, v_i divise v_r . Comme, $r < i$, $v_r < v_i$, d'où $v_r = 0$ et $r = 0$. Ce qui démontre la scolie.

Si v_i^2 divise v_k , en particulier v_i divise v_k et $k = qi$. Comme,

$$u_{qi} + Av_{qi} = (u_i + Av_i)^q$$

$$v_{qi} = \sum_{\substack{j=0 \\ j=2p+1}}^q \binom{q}{2p+1} u_i^{q-j} v_i^j (a^2 - 1)^p$$

$$v_k = v_{qi} \equiv \binom{q}{1} u_i^{q-1} v_i \pmod{v_i^2}$$

$$v_k \equiv qu_i^{q-1} v_i \pmod{v_i^2}$$

et

$$v_k \equiv 0 \pmod{v_i^2}.$$

Or u_i et v_i sont premiers entre eux, par suite v_i divise q , donc v_i divise k .

Complément C₄.

v_{4nv_n} est divisible par $4v_n^2$.

En effet, il suffit de remarquer que

$$\binom{4v_n}{2p+1} \equiv 0 \pmod{4}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de justifier le lemme utilisé dans la démonstration du théorème P_3 .

Lemme

Étant donné deux nombres entiers a et n , $1 \leq n$ et $2 \leq a$, $y = v_n$ si et seulement si il existe cinq entiers c, d, r, u et x tels que

$$(6) \quad x^2 = (a^2 - 1)y^2 + 1$$

$$(7) \quad u^2 = 16(a^2 - 1)r^2y^4 + 1$$

$$(8) \quad (x + cu)^2 = \{[a + u^2(u^2 - a)]^2 - 1\} \\ (n + 4dy)^2 + 1$$

$$(11') \quad n \leq y.$$

Démonstration :

• a) La condition est nécessaire.

Si $y = v_n$, la condition (11') est automatiquement satisfaite, et pour $x = u_n$, nous obtenons la condition (6).

Posons alors, $u = u_{4nv_n}$, d'après le complément C_4 , v_{4nv_n} est divisible par $4v_n^2$, donc

$$v_{4nv_n} = 4rv_n^2,$$

d'où r , et nous obtenons (7).

Enfin, en posant $b = a + u^2(u^2 - a)$,

$$b \equiv a \pmod{u_{4nv_n}},$$

et les solutions (s_j, t_j) de l'équation de Pell P_b sont telles que

$$s_j \equiv u_j \pmod{u_{4nv_n}},$$

d'après le complément C_1 donc, pour $j = n$,

$$s_n = x_n + cu_{4nv_n},$$

d'où la valeur de c .

Mais, $u^2 \equiv 1 \pmod{4v_n}$ et donc $b - 1 \equiv 0 \pmod{4v_n}$. Comme,

$$t_n \equiv n \pmod{b - 1},$$

$$t_n \equiv n \pmod{4v_n}$$

et

$$t_n = n + 4dv_n$$

d'où d et la condition (8).

• b) La condition est suffisante.

Posons, avec des notations évidentes :

$$x = u_i, \quad y = v_i, \\ u = u_k, \quad 4rv_i^2 = v_k,$$

$$u_i + cu_k = s_j \quad \text{et} \quad n + 4dv_i = t_j.$$

Il suffit de montrer que $i = n$.

D'une part, si nous posons

$$b = a + u^2(u^2 - a),$$

nous avons

$$b \equiv a \pmod{u_k},$$

et d'après le complément C_1 :

$$s_j \equiv u_j \pmod{u_k}$$

, mais,

$$s_j = u_i + cu_k$$

donc

$$s_j \equiv u_i \pmod{u_k}$$

et donc

$$u_j \equiv u_i \pmod{u_k}$$

Comme v_i divise visiblement v_k , $v_i \leq v_k$ et $i \leq k$, d'après le complément C_2 :

$$j \equiv \pm i \pmod{4k}.$$

Comme v_i^2 divise v_k , d'après le complément C_3 , v_i divise k et

$$j \equiv \pm i \pmod{4v_i}.$$

D'autre part, $t_j = n + 4dv_i$ donc

$$t_j \equiv n \pmod{4v_i}$$

et, comme dans la condition nécessaire

$$t_j \equiv j \pmod{4v_i}$$

soit

$$j \equiv n \pmod{4v_i}.$$

Puisque $0 < i \leq v_i$ et $n \leq v_i$, nous pouvons conclure :

$$i = n \quad \text{et} \quad y = v_n$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Bibliographie

- [1] BOUVIER, *Dictionnaire*, PUF 1979, page 358, 10^e problème de Hilbert.
- [2] BRETTE François LE LIONNAIS, *Les nombres remarquables*, Hermann 1983, page 146.
- [3] CUCULIÈRE Roger, APM Bulletin 342, pages 31-40 : *Représentation diophantienne des nombres de Fibonacci*.
- [4] JONES James P., *Diophantine representation of the set of prime numbers*, American Mathematical Monthly, June-July 1976, pp. 449-464.
- [5] MARTIN, DAVIS, *Hilbert's tenth problem is unsolvable*, March 1973, p. 233-269.
- [6] WALCSCHMIDT, *Le monde*, 26 octobre 1977, page 19.

Sujet

Binaire HF1/H₂O, section isobare (à pression atmosphérique).

- Questions générales : que représente chaque courbe, quelles phases y a-t-il pour chaque domaine du diagramme, s'agit-il d'un binaire idéal (ici, il était azéotrope), etc.
- Lien entre fraction molaire et fraction massique.
- Application au calcul de la composition du binaire pour une fraction molaire donnée et à température donnée en utilisant le théorème des moments.

Sujet

Marc Bloch, *Apologie pour l'histoire* (1942).

Aux antipodes des fouilleurs d'origines, se placent les dévots de l'immédiat. Montesquieu, dans une de ses oeuvres de jeunesse, parle de cette « chaîne infinie des causes qui se multiplient et se combinent de siècle en siècle ». À en croire certains écrivains, la chaîne, à son extrémité la plus proche de nous, serait apparemment bien ténue. Car ils conçoivent la connaissance de ce qu'ils appellent le présent comme presque absolument détachée du passé. L'idée est trop répandue pour ne pas mériter qu'on cherche à en disséquer les éléments.

Il convient, d'abord, de l'observer : prise à la lettre, elle serait, proprement, impensable. Qu'est-ce, en effet, que le présent ? Dans l'infini de la durée, un point minuscule et qui sans cesse se dérobe ; un instant qui meurt aussitôt né. À peine ai-je parlé, à peine ai-je agi que mes propos ou mes actes sombrent au royaume de Mémoire. C'est le mot, à la fois banal et profond, du jeune Goethe : il n'y a pas de présent, rien qu'un devenir, *nichts gegenwärtig, alles vorübergehend*. Condamnée à une éternelle transfiguration, une prétendue science du présent se métamorphoserait, à chaque moment de son être, en science du passé.

J'entends bien : on criera au sophisme. Dans le langage courant, « présent » veut dire proche passé. Acceptons donc désormais, sans barguigner, cet emploi un peu lâche du mot. Ce n'est pas qu'il ne soulève à son tour de sérieuses difficultés. La notion de proximité ne manque pas seulement de précision - de combien d'années s'agit-il ? -, elle nous met, elle aussi, en présence du plus éphémère des attributs. Si le moment actuel, au sens strict du terme, n'est qu'une perpétuelle évanescence, la frontière entre le présent et le passé ne se déplace pas d'un mouvement moins constant. Le régime de la monnaie stable et de l'étalon-or qui, hier, figurait dans tous les manuels d'économie politique, comme la norme même de l'actualité, pour l'économiste d'aujourd'hui, est-ce encore du présent ? ou de l'histoire qui, déjà, sent un peu le mois ? Derrière ces paralogismes, cependant, il est facile de découvrir un faisceau d'idées moins inconsistantes et dont la simplicité, au moins apparente, a séduit certains esprits.

Dans le vaste écoulement des temps, on croit pouvoir mettre à part une phase de faible étendue. Relativement peu distante de nous, à son point de départ, elle recouvre, à son aboutissement, les jours mêmes que nous vivons. En elle, rien, ni les caractères les plus marquants de l'état social ou politique, ni l'outillage matériel, ni la tonalité générale de la civilisation ne présentent, semble-t-il, de différences profondes avec le monde où nous avons nos habitudes. Elle paraît, en un mot, affectée, par rapport à nous, d'un coefficient très fort de « contemporanéité ». D'où l'honneur ou la tare de ne pas être confondue avec le reste du passé. « Depuis 1830, ce n'est plus de l'histoire », nous disait un de nos professeurs de lycée, qui était très vieux quand j'étais très jeune : « c'est de la politique ». On ne dirait plus aujourd'hui : « depuis 1830 » - les Trois glorieuses, à leur tour, ont pris de l'âge - ni « c'est de la politique ». Plutôt, d'un ton respectueux « de la sociologie » ; ou, avec moins de considération : « du journalisme ». Beaucoup cependant répéteraient volontiers : depuis 1914 ou 1940, ce n'est plus de l'histoire. Sans, d'ailleurs, très bien s'entendre sur les motifs de cet ostracisme'.

Certains, estimant que les faits les plus voisins de nous sont, par là même, rebelles à toute étude vraiment sereine, souhaitent simplement épargner à la chaste Clio de trop brûlants contacts. Ainsi pensait, j'imagine, mon vieux maître. C'est, assurément, nous prêter une faible maîtrise de nos nerfs. C'est aussi oublier que, dès que les résonances sentimentales entrent en jeu, la limite entre l'actuel et l'inactuel est loin de se régler nécessairement sur la mesure mathématique d'un intervalle de temps. Avait-il si tort mon brave proviseur qui, dans le lycée languedocien où je fis mes premières armes (de professeur), m'avertissait, de sa grosse voix de capitaine d'enseignement : « Ici, le XIX^e siècle, ce n'est pas bien dangereux ; quand vous toucherez aux guerres de Religion, soyez très prudent. » En vérité, qui, une fois devant sa table de travail, n'a pas la force de soustraire son cerveau au virus du moment sera fort capable d'en laisser filtrer les toxines jusque dans un commentaire de l'Iliade ou du Ramayana.

D'autres savants, au contraire, jugent avec raison le présent humain parfaitement susceptible de connaissance scientifique. Mais c'est pour en réserver l'étude à des disciplines bien distinctes de celle qui a le passé pour objet. Ils analysent ; par exemple, ils prétendent comprendre l'économie contemporaine à l'aide d'observations bornées, dans le temps, à quelques décades. En un mot, ils considèrent l'époque où ils vivent comme séparée de celles qui l'ont précédée par de trop vifs contrastes pour ne point porter en elle-même sa propre explication. Telle est aussi l'attitude instinctive de beaucoup de simples curieux. L'histoire des périodes un peu lointaines ne les séduit que comme un inoffensif luxe de l'esprit. D'un côté une poignée d'antiquaires, occupés, par macabre dilection, à démailloter les dieux morts ; de l'autre, sociologues, économistes, publicistes - les seuls explorateurs du vivant...

Le curieux est que l'idée de ce schisme a surgi tout récemment. Les vieux historiens grecs, un Hérodote, un Thucydide, plus près de nous, les véritables maîtres de nos études, les ancêtres dont les images mériteront éternellement de figurer dans la cella de la corporation n'ont jamais rêvé que, pour expliquer l'après-midi, il pût suffire de connaître, au plus, le matin. « Celui qui voudra s'en tenir au présent, à l'actuel, ne comprendra pas

l'actuel », écrivait Michelet, en tête de ce beau livre du *Peuple*, tout frémissant, pourtant, des fièvres du siècle. Et déjà Leibnitz rangeait, parmi les bienfaits qu'il attendait de l'histoire, « les origines des choses présentes trouvées dans les choses passées » ; car, ajoutait-il, « une réalité ne se comprend jamais mieux que par ses causes ».

Mais depuis Leibnitz, depuis Michelet, un grand fait s'est produit les révolutions successives des techniques ont démesurément élargi l'intervalle psychologique entre les générations. Non sans quelque raison, peut-être, l'homme de l'âge de l'électricité et de l'avion se sent très loin de ses ancêtres. Volontiers il en conclut, plus imprudemment, qu'il a cessé d'être déterminé par eux. Ajoutez le tour moderniste inné à toute mentalité d'ingénieur. Pour mettre en marche ou réparer une dynamo, est-il nécessaire d'avoir pénétré les idées du vieux Volta sur le galvanisme ? Par une analogie, sans nul doute boiteuse, mais qui s'impose spontanément à plus d'une intelligence soumise à la machine, on pensera de même que, pour comprendre les grands problèmes humains de l'heure et tenter de les résoudre, il ne sert à rien d'en avoir analysé les antécédents. Pris eux aussi, sans bien s'en rendre compte, dans cette atmosphère mécanicienne, certains historiens font chorus : « Comme explication du présent, l'histoire se réduirait presque à l'étude de la période contemporaine. » Ainsi ne craignaient pas d'écrire, en 1899, deux d'entre eux.

Remarques

- L'examineur rappelle les consignes de l'épreuve si votre prestation ne semble pas les respecter (si elle est trop courte, par exemple).
- L'entretien peut porter sur les points soulevés pendant la dissertation, ou sur le texte proposé.
- Évitez de passer trop de temps à la préparation du résumé ; il en restera moins pour préparer la dissertation, et en plus, elle devra durer plus longtemps...

Sujet

Can smoking ever be made safe?

New Scientist, 10 June 2009, Linda Geddes.

Tobacco companies have begun “clinical trials” to assess whether a range of prototype “safer cigarettes” really do slash levels of toxic chemicals entering the body. At the moment there is no way of regulating any health claims firms might want to make for these cigarettes or restricting whether they bring such products onto the market at all. But this week the US government will decide whether to hand the job over to the Food and Drug Administration.

Allowing the FDA to verify and restrict health claims made by cigarette companies could raise the bar on the quality of scientific evidence behind such claims, leading to greater transparency in tobacco research and cigarette marketing that could ultimately benefit smokers. “What I hope it will do is make it harder for tobacco companies to market products without some evidence that they are likely to reduce the death and disease associated with smoking,” says Thomas Eissenberg, a drug dependence researcher at Virginia Commonwealth University in Richmond.

However, anti-smoking campaigners question whether such products should ever find their way to market. “I would be extremely sceptical of any attempt to produce healthy cigarettes,” says Deborah Arnott of anti-smoking charity ASH-UK. “The conclusion we have reached is that it’s really difficult to do anything to significantly reduce the harm caused by cigarettes.”

As *New Scientist* went to press, the US Senate was preparing to vote on whether regulation of the cigarette industry should be handed over to the FDA. Tobacco companies worldwide are following the vote closely as they believe it will influence how other regulators might proceed.

Many tobacco companies across the world are already pinning their hopes of future growth on the development of so-called “potentially reduced exposure products” These include a type of powdered tobacco called snus, e-cigarettes and so-called “reduced harm” cigarettes containing lower levels of toxicants and modified filters (see “A guide to cigarette alternatives”

Meanwhile, the prospect of having their claims vetted by government is prompting companies to devise new, more accurate ways to test the health impact of cigarettes.

Traditionally, tobacco companies look at the chemical composition of tobacco and the smoke it produces when drawn through a “smoking machine” to assess its potential for harm. But machines don’t reflect the way real people smoke - smokers often puff harder on “low-tar” cigarettes to get the same experience of smoking, for example. “Machine measurements do not reflect what any individual, let alone a population of smokers gets from a cigarette,” says David O’Reilly, head of public health and scientific affairs at British American Tobacco (BAT) in London, which sells a range of cigarette brands outside the US.

So companies are now searching for new ways to assess a person’s exposure to the toxicants in smoke. The most promising approach is to look for biomarkers such as the carcinogen pyrene in body fluids like urine.

“Development of biomarkers is critical for assessment of tobacco products,” says Dorothy Hatsukami of the University of Minnesota in Minneapolis, whose lab is investigating biomarkers of smoke exposure. “You can’t determine whether tobacco has reduced risk potential until you put it into a person and they use it.”

So far BAT has identified several biomarkers which it is using to compare the amounts of toxicants smokers get from conventional cigarettes against prototype cigarettes which have been modified to be less harmful. A pilot study looked at concentrations of nicotine metabolites and three toxicants - NNK, acrolein and pyrene - in the urine of 150 smokers, with 50 non-smokers as controls. It found that urine levels correlated with those in the filters of the cigarettes the volunteers smoked (Regulatory Toxicology and Pharmacology, in press). This is proof of the principle that it is possible to work out from urine samples whether a potentially safer cigarette exposes smokers to lower levels of damaging chemicals.

BAT now started a trial in which 250 smokers are either given conventional cigarettes, prototype cigarettes, or asked to quit smoking. The study will compare the levels of biomarkers in urine to see whether people smoking modified cigarettes are exposed to lower levels of toxicants or not.

[Source : <http://www.newscientist.com/article/mg20227124.600-can-smoking-ever-be-made-safe.html>, mais l’image présente sur ma version de l’article n’est pas celle qui est affichée sur cette page. Je n’indique que la partie qu’il fallait réellement que je commente (voir plus bas).]

Remarques

- Si vous passez en retard ou en avance, notez bien l'heure de début de préparation pour ne pas vous retrouver dans l'incapacité d'évaluer le temps qui vous reste...
- Lorsque vous recevez votre texte, pensez à vérifier que vous comprenez bien ce que vous devez étudier. J'ai découvert en préparation (après le départ du khôlleur) qu'un symbole semblait indiquer que je ne devais m'intéresser qu'à une portion du texte, mais je n'ai pas pu déterminer si certains encarts en faisaient partie.
- Assurez-vous d'avoir le vocabulaire nécessaire pour pouvoir vous occuper des formalités administratives avec l'examineur ; il se peut que ce soit un natif ayant peu envie de s'exprimer en français.
- Si vous commentez un support iconographique, attendez-vous à ce que l'examineur creuse dans cette direction (voire, dans mon cas, vous présente la version originale de l'illustration qui était peu lisible sur la photocopie et vous fasse développer).
- Dans mon cas, l'examineur s'est lancé dans un entretien directement après l'analyse, si bien que mon commentaire est passé à la trappe.

Sujet

Texte à propos des effets de la production de viande (en particulier bovine) sur le réchauffement climatique (l'examinatrice m'a précisé au cours de ma présentation qu'il venait de *Scientific American*).

Remarque

- Il n'est pas toujours facile de désigner les différentes personnes qui parlent : il peut s'agir de situations plus difficiles à décrire qu'un couple intervieweur/interviewé. Dans mon cas, il s'agissait de deux personnes (des journalistes ?) qui discutaient ensemble en commentant un article (tiré de la presse ?) ; le nom des interlocuteurs n'est pas toujours donné (le premier s'appelait "Steve", mais le nom de l'autre n'était apparemment pas révélé). Cela peut rendre nécessaire le recours à des périphrases peu naturelles.

Sujet

Tot oder lebendig?

Von Steffen Grimberg.

Man kann nicht über fehlende Einnahmen meckern, wenn man gar nicht erst zur Kasse bittet - sagt Mr. Murdoch.

Wälder sollten sich auf das Jahr 2030 freuen, denn dann wird es die auf Papier gedruckte Tageszeitung nicht mehr geben - sagt kein Geringerer als Rupert Murdoch. "Ich seh den Tag kommen, in vielleicht 20 Jahren, wo es kein Papier und Druckfarbe und Rotationsmaschinen mehr gibt" sagte der Chef des Medienmultis News Corporation am Dienstag seinem US-Fernsehsender Fox. "Es wird eine Generation dauern, aber es gibt keinen Zweifel daran, dass jüngere Menschen nicht mehr die klassische Zeitung annehmen."

Ist das derselbe Murdoch, der weiter munter in die gedruckte Presse investiert und ihr noch Ende 2008 "neue Höhenflüge" im 21. Jahrhundert prophezeite? Er ist es, und das Ganze muss in der Sache kein Widerspruch sein.

"Die digitale Welt wird Zeitungen verändern" sagt Murdoch, 78, weiter, "aber wenn man eine Zeitung mit einem guten Namen und einem guten Ruf hat, eine Marke, der die Menschen vertrauen, brauchen sie auch weiterhin Zugang zu deren Journalismus, zu deren Informationen und Quellen." Die News Corp. will daher das Internetangebot für viele ihrer Titel weltweit wieder überwiegend kostenpflichtig machen. Vorbild ist das Ende 2007 nach langer Schlacht von Murdoch übernommene *Wall Street Journal* (*WSJ*), das laut News Corp. rund eine Million zahlende Online-AbonentInnen hat.

Die Nutzer seien durchaus bereit, für Online-Inhalte zu bezahlen, wie man am Beispiel der Musik sehen könne, heißt es bei der News Corp. Da ist etwas dran: Die meisten Zeitungsverleger beklagen, dass die Menschen im Internet nicht für Informationen bezahlen wollten - ohne dass jemals ernsthaft versucht wurde, sie wirklich bezahlen zu lassen.

Beim *WSJ* wird zudem am Modell der "unified subscription" einer Art Einheitsabo für alle Vertriebswege, getüftelt, das auch künftige Verbreitungsformen über E-Reader einbezieht. Hier sind andere Verlage skeptisch, Einigkeit besteht immerhin darin, dass es bei Bezahlssystemen auf die einfache, sichere und bequeme Handhabbarkeit ankommt: Die meisten "Micro-Payments" im Netz, wo niedrige Beträge für Einzelartikel zu entrichten sind, scheitern an ihrer Umständlichkeit: Wer zückt schon jedes Mal die Kreditkarte für ein paar Cent? Auch die angeschlagene *New York Times* hatte rund eine Viertelmillion Online-Zahler, doch war das Ganze für den Verlag zu mühsam. Er hielt nicht lange durch, aktuell ist alles kostenfrei - dafür werden *NYT*-User im Internet jetzt mit einer Anzeige begrüßt, die weggeklickt werden muss.

Etwas ganz Ähnliches soll ja auch bei gedruckten Zeitungen immer häufiger vorkommen. Solange es sie überhaupt noch gibt, versteht sich. Denn gestern sekundierte auch Jakob Augstein, 41, dem Medienmogul - doch der *Freitag*-Neuverleger sieht für Tageszeitungen um einiges schwärzer: Das Netz habe "im Prinzip gewonnen" sagt Augstein auf fr-online.de: "Die Tageszeitungen machen meiner Meinung nach jetzt schon keinen Sinn mehr, weil auf den ersten zwei, drei Seiten nur Nachrichten stehen - das ist völliger Schwachsinn!"

Wochenzeitungen und Magazine seien dagegen kaum betroffen, sie kollidierten "überhaupt nicht mit dem Internet. Sie können im Hochglanzdruck super Bilderstreifen machen, wie in *Geo* oder *Stern* - das wird es immer geben. Aber ich wüsste nicht, warum es die *Süddeutsche* in 20 Jahren noch geben soll."

[Source : <http://www.taz.de/1/archiv/print-archiv/printressorts/digi-artikel/?ressort=f1&dig=2009%2F06%2F11%2Fa0155>.]

Remarques

- L'examineur peut commencer par vous demander de lire le début du texte à voix haute. (En pratique, à en croire le rapport de jury, il le fait systématiquement.)

Sujet

Exercice 1 Soient $A_1, \dots, A_p \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tous i et j tels que $i \neq j$, ${}^t A_i A_j = 0$. On suppose également que $\sum_{j=1}^p A_j \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{j=1}^p \text{rg}(A_j) = n$. On traitera dans un premier temps le cas où $\sum_{j=1}^p A_j = I_n$.

Exercice 2 Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$. On note $n(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. On suppose qu'il existe des réels $k > 0$ et $\rho > 0$ tels que pour tout $r > \rho$, $n(r) \leq e^{kr}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \leq N$, $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{ke}{n}$.

Corrigé

Exercice 1 Supposons que $\sum_{j=1}^p A_j = I_n$. Soit $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq p$. On calcule ${}^t A_i \left(\sum_{j=1}^p A_j \right) = {}^t A_i A_i$, mais on a aussi ${}^t A_i \left(\sum_{j=1}^p A_j \right) = {}^t A_i I_n = {}^t A_i$. Ainsi, ${}^t A_i A_i = {}^t A_i$. Or ${}^t A_i A_i$ est symétrique, donc ${}^t A_i$ l'est aussi et l'égalité précédente se réécrit $A_i^2 = A_i$. Ainsi, A_i est un projecteur, d'où $\text{rg}(A_i) = \text{tr}(A_i)$. On a donc $\sum_{j=1}^p \text{rg}(A_j) = \sum_{j=1}^p \text{tr}(A_j) = \text{tr} \left(\sum_{j=1}^p A_j \right) = \text{tr}(I_n) = n$.

Dans le cas où $\sum_{j=1}^p A_j = M \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\sum_{j=1}^p A_j M^{-1} = I_n$, et on a toujours ${}^t (A_i M^{-1}) (A_j M^{-1}) = 0$ pour $i \neq j$. On conclut donc en réappliquant le cas précédent aux $A_i M^{-1}$.

Exercice 2 Par application de la formule de Cauchy, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$. Si $r > \rho$, on a donc $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| e^{-in\theta} d\theta$ soit $|a_n| \leq \frac{n(r)}{r^n} \leq \frac{e^{kr}}{r^n}$, et ainsi $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{e^{\frac{kr}{n}}}{r}$.

Soit $N = \rho k + 1$. Supposons $n \geq N$. La majoration précédente est alors vraie en particulier pour $r = \frac{n}{k}$ car $\frac{n}{k} > \rho$ et elle s'écrit alors $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{ke}{n}$. D'où le résultat demandé.

Sujet

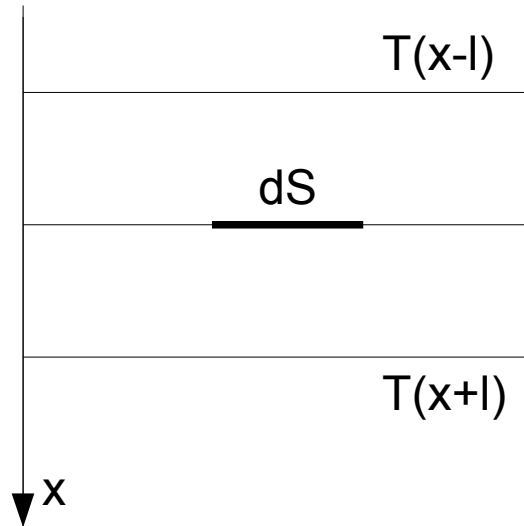
Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_0^n, \dots, a_n^n$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i < n$, on aie $\int_{a_i^n}^{a_{i+1}^n} f = \frac{1}{n} \int_0^1 f$.

Étudier la limite de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^n$ quand n tend vers ∞ .

Sujet

On considère un gaz parfait formé de particules de masse m et de rayon r réparties dans l'espace avec la densité n . Elles ont chacune une vitesse de module v .

1. Définir le parcours libre moyen l et le calculer en introduisant la vitesse relative de deux particules.
2. L'évaluer dans les conditions normales de température et de pression. Commenter le résultat.



3. On s'intéresse à une surface dS , normale à l'axe x , située entre deux plans chacun distants de l où règne la température $T(x-l)$ et $T(x+l)$ respectivement. Calculer le nombre moyen de particules traversant dS pendant dt dans un sens. En déduire le flux de particules dans un sens.
4. En déduire une expression de la conductivité thermique K (en utilisant la capacité thermique du gaz c).
5. La calculer dans le cas d'un gaz particulier, et la comparer à une valeur de référence fournie.

Remarques

- L'examineur était plus prêt à discuter et à aider en fin de khôlle qu'au début.
- Plutôt que de se retrouver désemparé devant des tentatives de résolution trop ambitieuses, mieux vaut se contenter dans un premier temps de modélisations grossières, qui seront peut-être suffisantes.
- La question 3. me semblait ambiguë ; je ne voyais pas s'il s'agissait de calculer le flux de particules total en orientant arbitrairement ce flux dans un sens et en algébrisant ou s'il s'agissait de se restreindre aux particules situées d'un certain côté de la surface. Après avoir longuement tenté de comprendre où l'examineur voulait en venir, il s'est avéré que c'est cette dernière interprétation qu'il convenait de privilégier.