Géométrie algorithmique

B. Meyer

Cours INF280, département INFRES

Contenu

Les objets simples

Les polygones

Algorithmes sophistiqués

En quelques mots

- Beaucoup de raisonnements mathématiques de collégiens, mais revus à la sauce algorithmique.
- Nombreux *risques d'erreurs* numériques :
  - $\rightarrow$ Dans le doute, utiliser des `double`.
- Cas limites ou cas dégénérés pénibles :
  - droites parallèles au lieu de sécantes,
  - triangles plats,
  - cercles de rayon nul,
  - droites de pente ∞,
  - etc.

Quelques bonnes pratiques

- Ne jamais faire le test `a==b` mais tester `fabs(a-b)<EPS` où `EPS` est petit (`1e-9` par exemple).
- Travailler avec des *entiers* aussi longtemps que possible.

Quelques exemples

- Utiliser $\|\mathbf{v}\|^2$ plutôt que $\|\mathbf{v}\|$ (ce qui évite $\sqrt{\cdot}$).
- Comparer les angles via leur cosinus s'il est plus facile à calculer.
- Utiliser une classe de pseudo-rationnels
  (par ex : couples [*num*, *denom*] avec opérateurs $=$ et $\leq$).

Principe du balayage par une droite

Contexte : problème portant sur n points.

Paradigme de géométrie algorithmique fréquent
(intersection de segments, diagrammes de Voronoï, etc.).

- Solution naïve en $O(n^2)$:
  Une action ou un test est effectué pour chaque couple de points.
- Solution par balayage en $O(n \ln n)$:
  On imagine une droite qui balaye le plan. Action ou test effectué sur les couples de points ou événements rencontrés le long de la droite.

(Ex : UVa10613, UVa10691)

Contenu

Les objets simples

Les polygones

Algorithmes sophistiqués

Les points

- Méritent souvent une classe propre.
- Penser à surcharger les opérateurs == ou < (si besoin de tri).

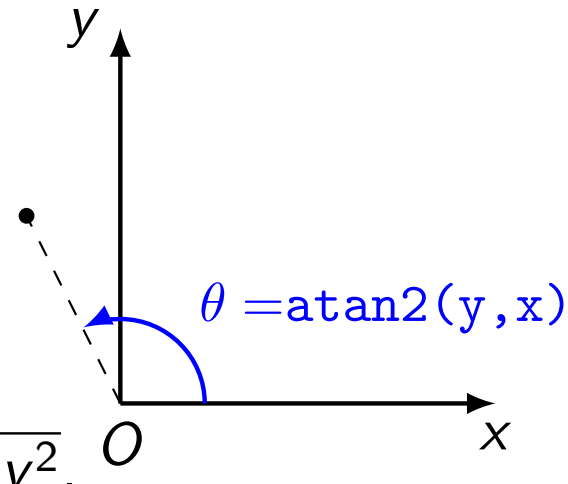
Une structure de points

```
struct point {
  double x, y;
  point() {
    x=0.0; y=0.0;
  }
  point(double in_x, double in_y): x(in_x), y(in_y) {}
  bool operator == (point pt2) const {
    return (fabs(x - pt2.x) < EPS
        && (fabs(y - pt2.y) < EPS));
  }
};
```

Les vecteurs

Prévoir dans son code :

- structure ad hoc,
- fonction produit scalaire $(xx' + yy')$,
- fonction produit vectoriel $(xy' - x'y)$.

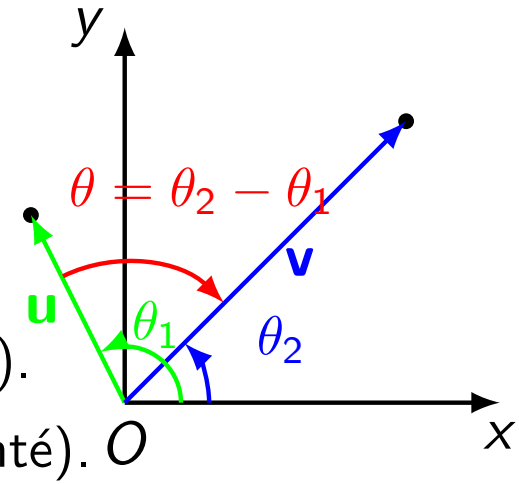


Attributs :

- Norme : `hypot(x,y)` renvoie $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- Angle avec l'axe (Ox) :
  - Éviter `atan(y/x)` (danger : division par 0).
  - $\rightarrow$ Utiliser `atan2(y,x)` (valeur dans $[-\pi, \pi]$).

Angle entre deux vecteurs **u** et **v** :

- Soustraire leur angle avec (Ox) (angle orienté).
- Calculer $\arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|)$ (angle non-orienté).



(Ex : UVa920, UVa10927, UVa11519)

Les droites, les segments, les coniques, . . .

Formes possibles de droites :

- équation cartésienne $ax + by + c = 0$,
- pente et ordonnée à l'origine $y = ax + b$ (sauf droite verticale),
- abscisse et ordonnée à l'origine $x/a + y/b = 1$,
- point & vecteur directeur,
- couple de points.

Coordonnées de l'intersection de deux droites sécantes $D : ax + by + c$ et $D : a'x + b'y + c'$ (via les formules de Cramer) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad x = -\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{et} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Les droites sont effectivement sécantes ssi Δ est non-nul.

(Ex : UVa837, UVa10678)

Distances sur la sphère

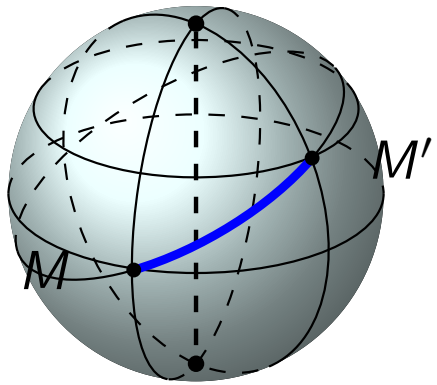
Distance orthodromique (ou distance du plus grand cercle) entre :

- premier point M de latitude δ et longitude λ,
- second point M' de latitude δ' et longitude λ',

avec la formule suivante (*Haversine formula* en anglais) :

$$d = 2R \arcsin \sqrt{\sin^2\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) + \cos\delta \cos\delta' \sin^2\left(\frac{\lambda' - \lambda}{2}\right)}$$

où R = rayon de la sphère.

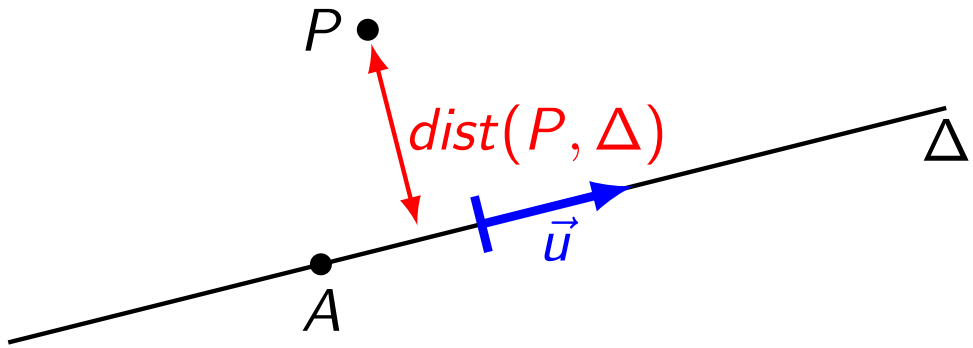


(Ex : UVa10316, UVa10897, UVa11817)

Distance point – droite

- Distance entre le point P et la droite Δ passant par A dirigée par $\vec{u}$:

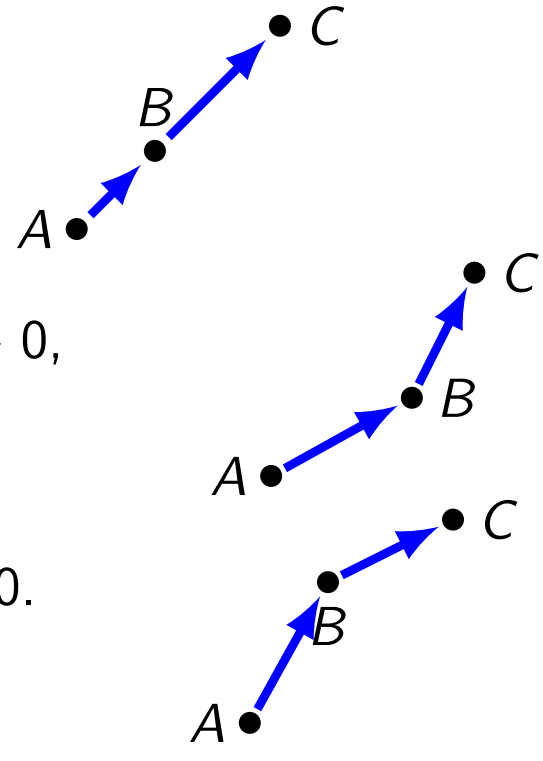
$$dist(A, \Delta) = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\| / \|\vec{u}\|.$$



(Ex : UVa10263)

Alignements et virages

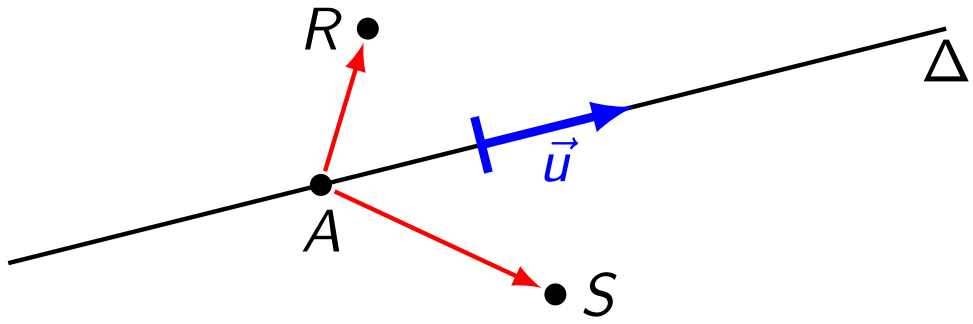
- Trois points A, B, C sont
  1. colinéaires ssi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = 0$,
  2. en virage à gauche ssi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} > 0$,
  3. en virage à droite ssi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} < 0$.



Intersection de segments

- Un bipoint (R, S) est de part et d'autre de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si

$$(\overrightarrow{AR} \times \vec{u}) \cdot (\overrightarrow{AS} \times \vec{u}) < 0.$$



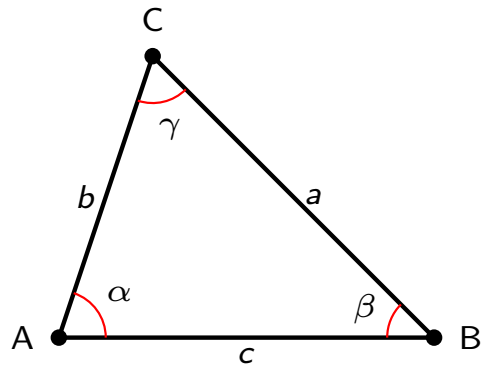
- Deux segments $[AB]$ et $[RS]$ s'intersectent ssi le bipoint (A, B) est de part et d'autre de la droite (RS) et le bipoint (R, S) est de part et d'autre de la droite (AB).

  Pour calculer l'intersection, voir transparent 9.

  (Ex : UVa191, UVa10902)

Contenu

Grandeurs du triangle



- Longueur des côtés (Al-Kashi) :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

- Aire du triangle ABC :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

où $s = (a+b+c)/2$ (formule d'Héron).

- Centre de gravité, intersection des médianes :

$$G = \mathit{barycentre}((A,1),(B,1),(C,1)).$$

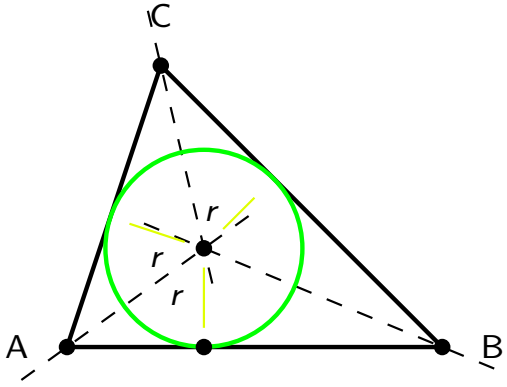
- Orthocentre, intersection des hauteurs :

$$H = \mathit{barycentre}((A,\tan\alpha),(B,\tan\beta),(C,\tan\gamma)).$$

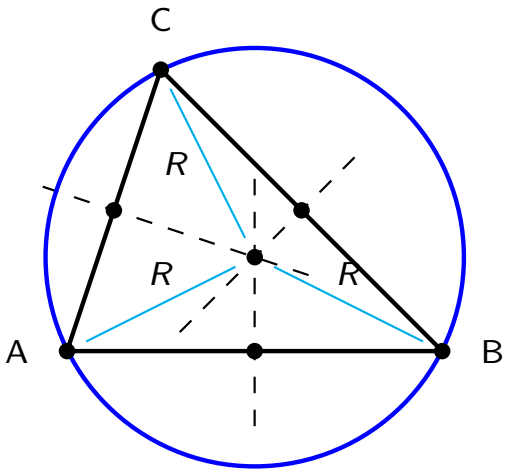
(Ex : UVa10792, UVa10522, UVa10991)

Cercles des triangles

- Cercle inscrit :
  - Centre I : intersection des bissectrices :
    $I = \mathit{barycentre}((A, a), (B, b), (C, c))$.
  - Rayon $r = \frac{A}{s}$ où $A =$ aire, $s =$ demi-périmètre.



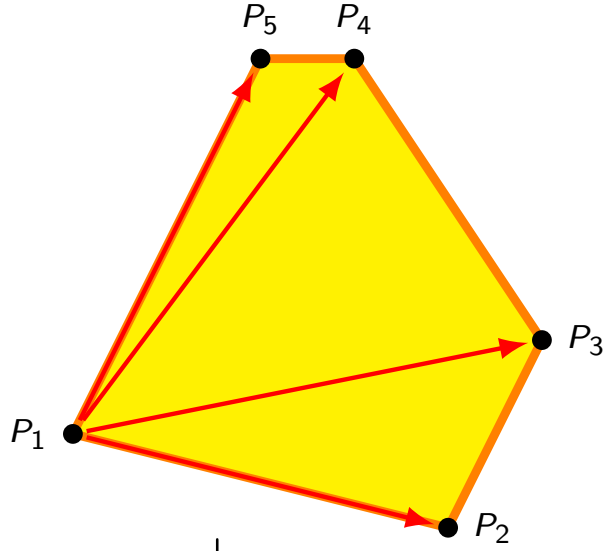
- Cercle circonscrit :
  - Centre O : intersection des médiatrices :
    $O = \mathit{barycentre}((A, \tan\beta + \tan\gamma),$
    $(B, \tan\alpha + \tan\gamma), (C, \tan\alpha + \tan\beta))$.
  - Rayon $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A} = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$.



(Ex : UVa11152, UVa10195)

Aire d'un polygone

Polygone $\Pi = (P_1 P_2 \cdots P_k)$:
(même formule que le triangle)



$$A = \frac{1}{2}\left\| \sum_{i=2}^{k-1} \overrightarrow{P_1P_k} \times \overrightarrow{P_1P_{k+1}} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \right| .$$

Valable que le polygone soit convexe ou non.

(Ex : UVa11265)

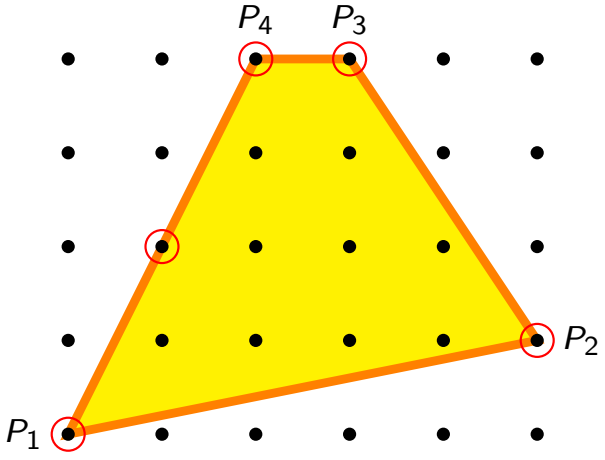
Formule de Pick

Théorème

Soit Π un polygone à sommets entiers, a son aire, b le nombre de points entiers sur sa frontière et i le nombre de points entiers dans son intérieur strict, alors

$$a = i + \frac{b}{2} - 1.$$

(Ex : UVa10088)



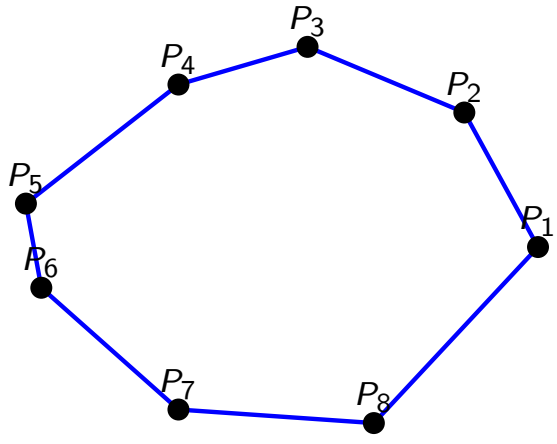
$$a = \frac{1}{2}\left\|\binom{5}{1} \times \binom{3}{4} + \binom{3}{4} \times \binom{2}{4}\right\|$$

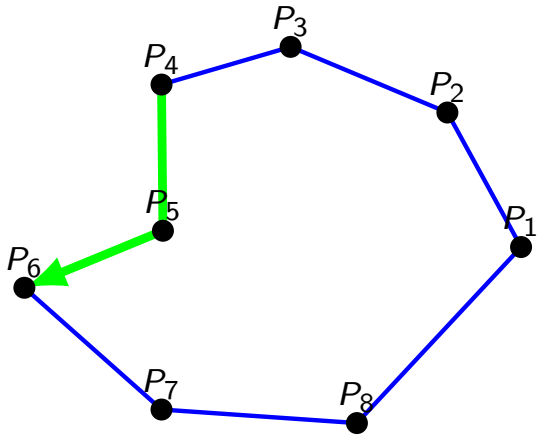
$$= 9 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{21}{2}$$

Convexité d'un polygone ?

Théorème

Pour qu'un polygone donné dans le sens trigonométrique $(P_1 P_2 \dots P_n)$ soit convexe, il faut et il suffit que pour tout $1 \leq i \leq n$, $P_{i-1} \to P_i \to P_{i+1}$ soit un virage à gauche.

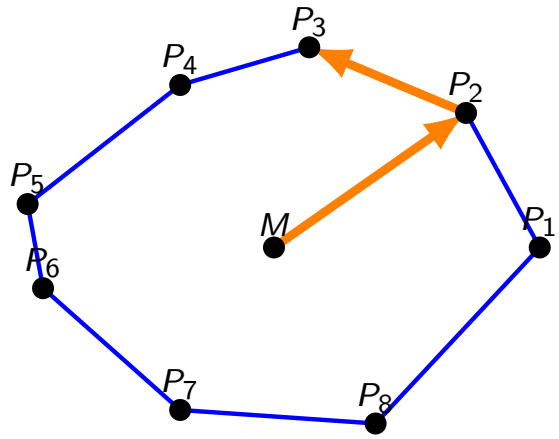


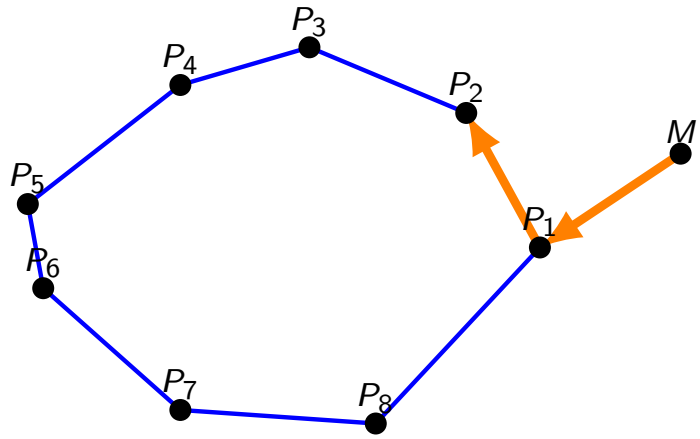


Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur du polygone convexe $(P_1 P_2 \dots P_n)$ ssi, pour tout $1 \leq i \leq n$, $M \to P_i \to P_{i+1}$ est un virage à gauche.





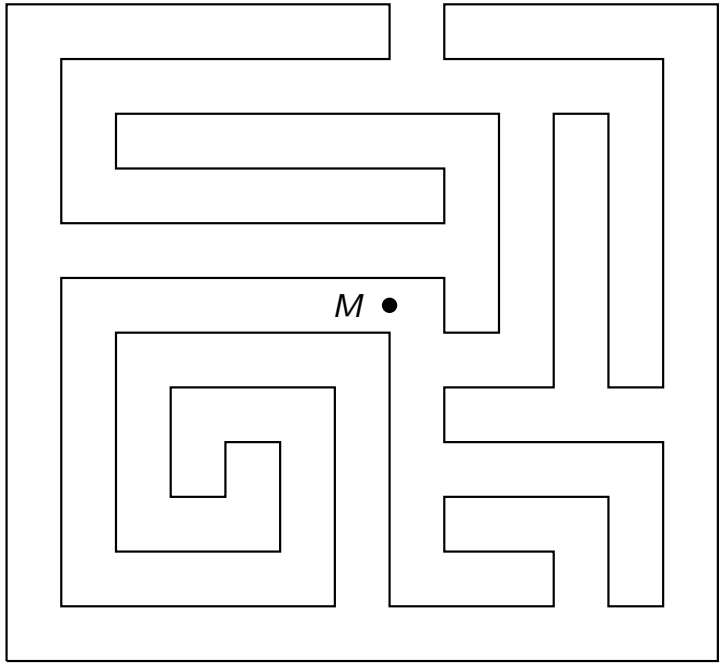
(Ex : UVa748, UVa10112)

Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur d'un polygone Π ssi une demi-droite issue de M intersecte les côtés de Π un nombre impair de fois.

Attention aux cas dégénérés : rencontre avec un sommet de Π ou inclusion d'une arête de Π.

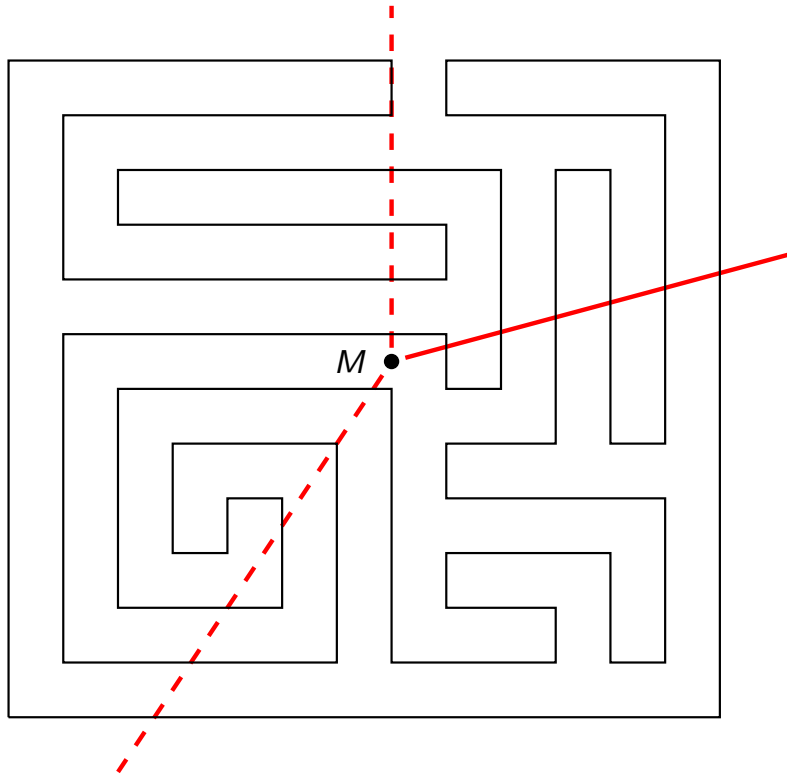


Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur d'un polygone Π ssi une demi-droite issue de M intersecte les côtés de Π un nombre impair de fois.

Attention aux cas dégénérés : rencontre avec un sommet de Π ou inclusion d'une arête de Π.

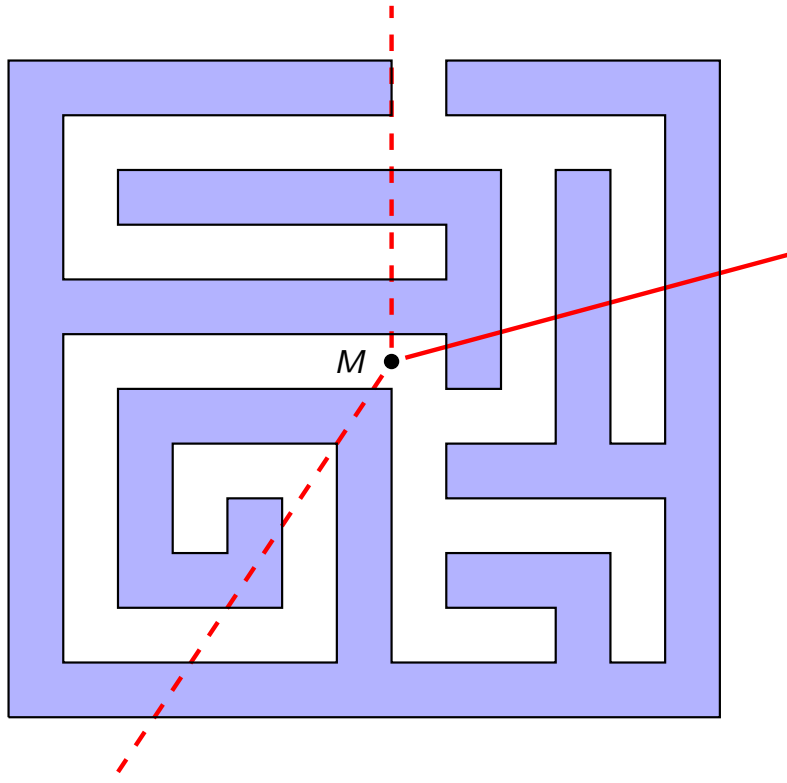


Point à l'intérieur d'un polygone ?

Théorème

Un point M appartient à l'intérieur d'un polygone Π ssi une demi-droite issue de M intersecte les côtés de Π un nombre impair de fois.

Attention aux cas dégénérés : rencontre avec un sommet de Π ou inclusion d'une arête de Π.



Contenu

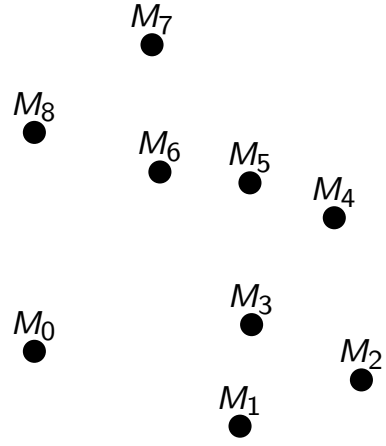
Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.



NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

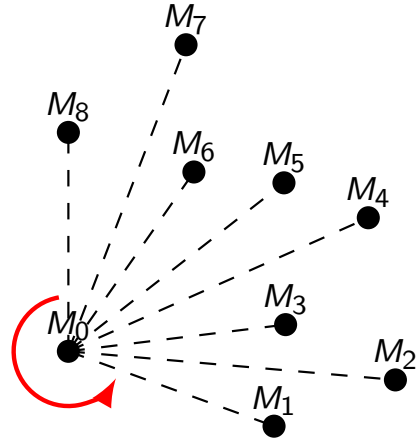
Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.



NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

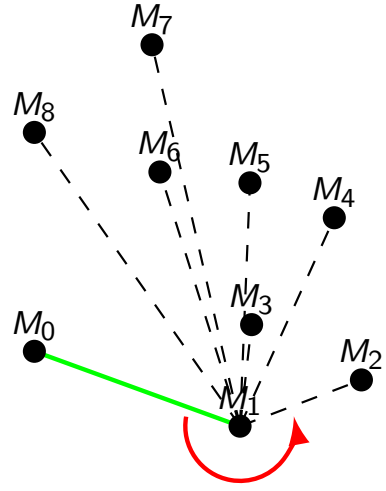
Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.



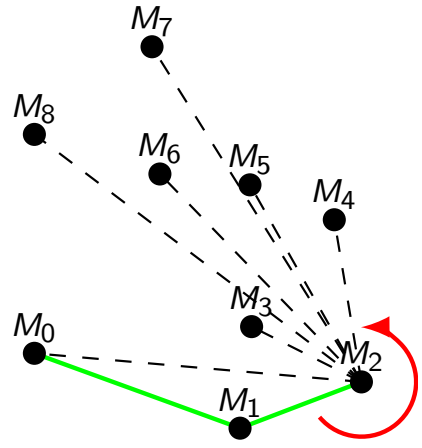
NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.



Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

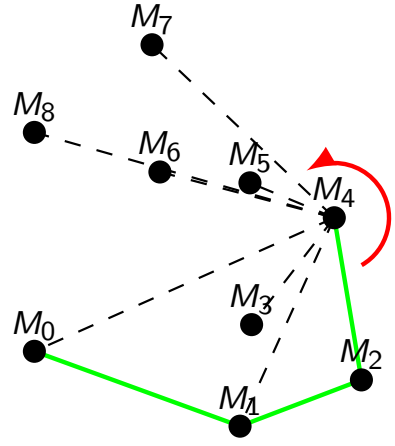
Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.



NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

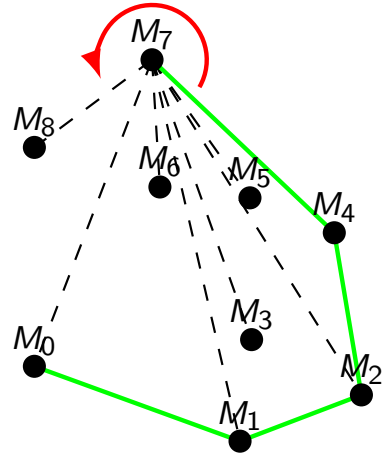
Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.



NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

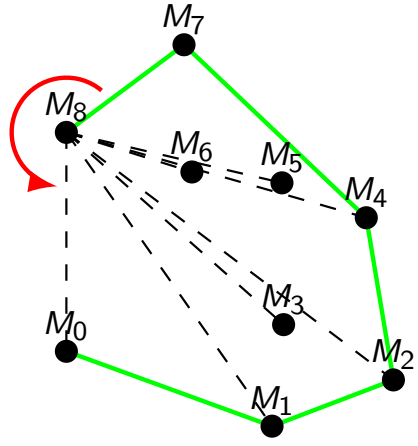
Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.

Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.



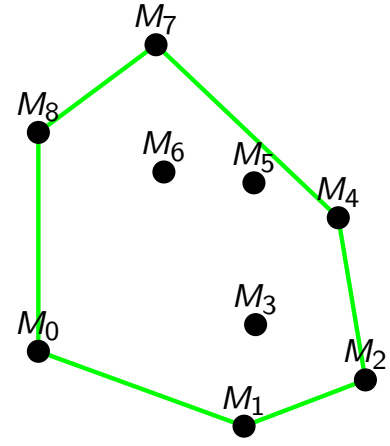
NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

Enveloppe convexe : la marche de Jarvis

(Ex : UVa10652, UVa596)

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(nh)$.



Emballage de cadeaux

$P_0 \leftarrow \min_i\{M_i\}$ (ordre lexicographique).
Pour $k \geq 0$,
  $P_{k+1} \leftarrow$ point le plus à droite de P_k.
  Si $P_{k+1} = P_0$, s'arrêter.

NB : P_{k+1} est le plus à droite de P_k si :

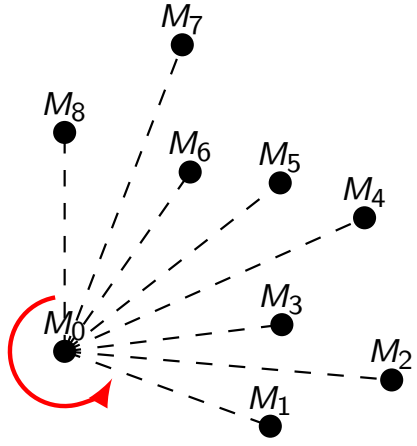
$$\forall M \neq P_k, P_{k+1}, \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \times \overrightarrow{P_k M} > 0.$$

Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

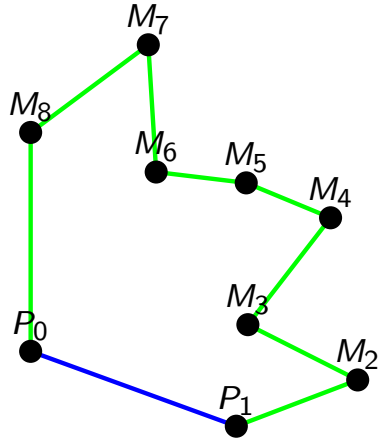


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

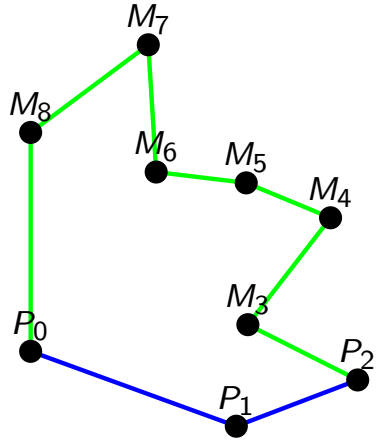


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

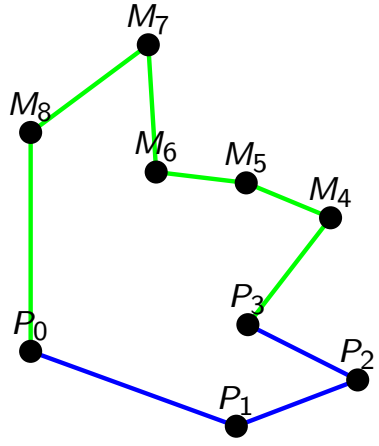


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

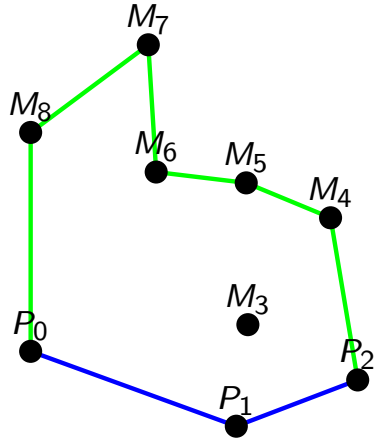


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

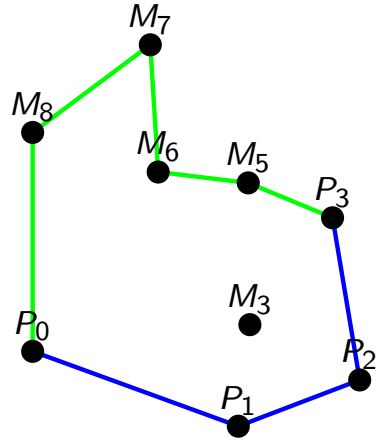


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

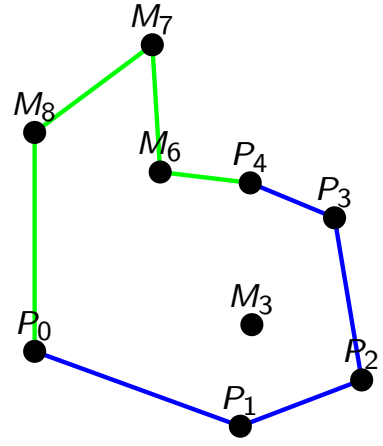


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

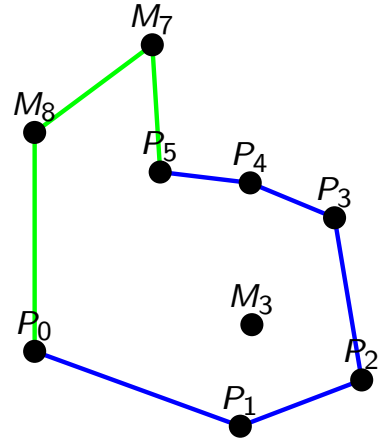


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

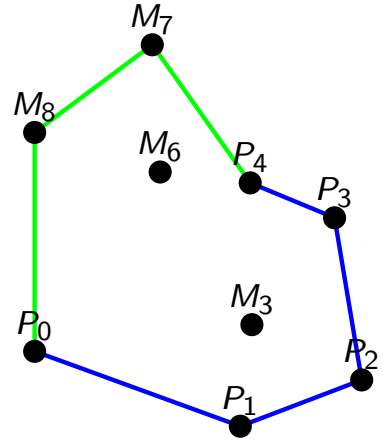


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

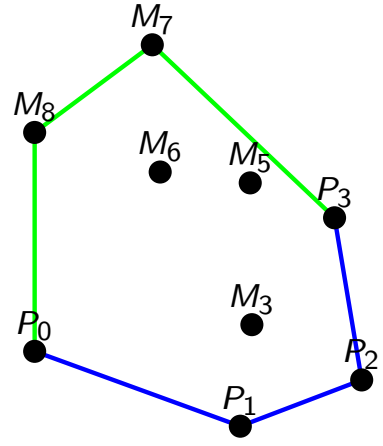


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

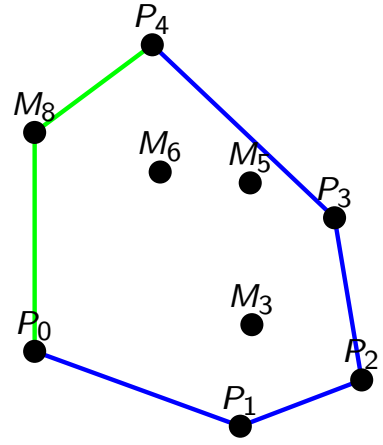


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

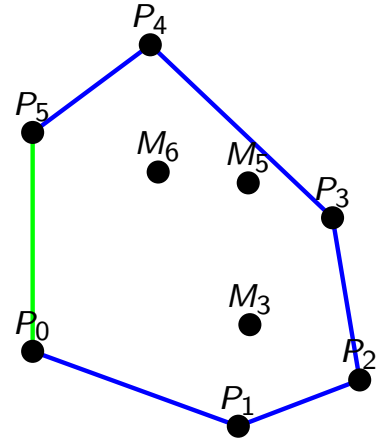


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).

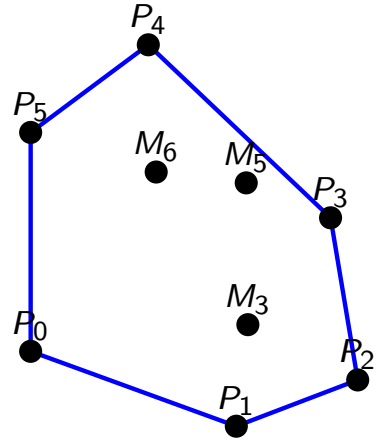


Enveloppe convexe : le parcours de Graham

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : Enveloppe convexe $(P_k)_{k \leq h}$.
Complexité : $O(n \log n)$.

Graham

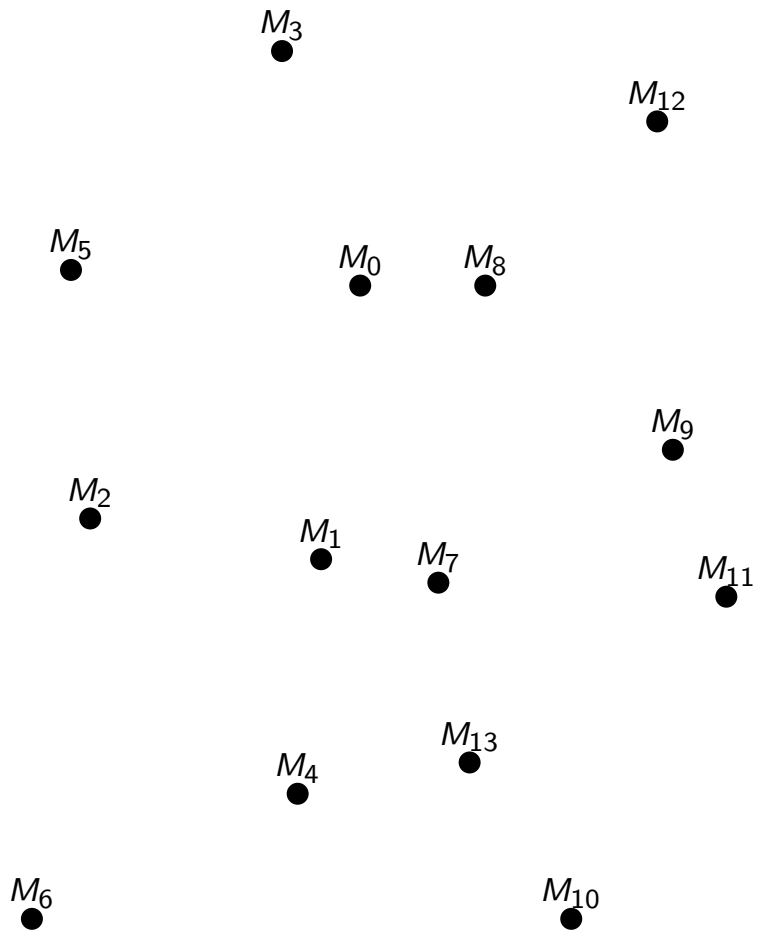
P.push($\min_i\{M_i\}$) (ordre lexicographique).
Trier $\{M_i\}$ par pente croissante de $(P_0 M_i)$.
P.push(M_1).
Pour $i \leq n$,
  Tant que $P_{-2} \to P_{-1} \to M_i$ en virage à droite,
    P.pop().
  P.push(M_i).



Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)



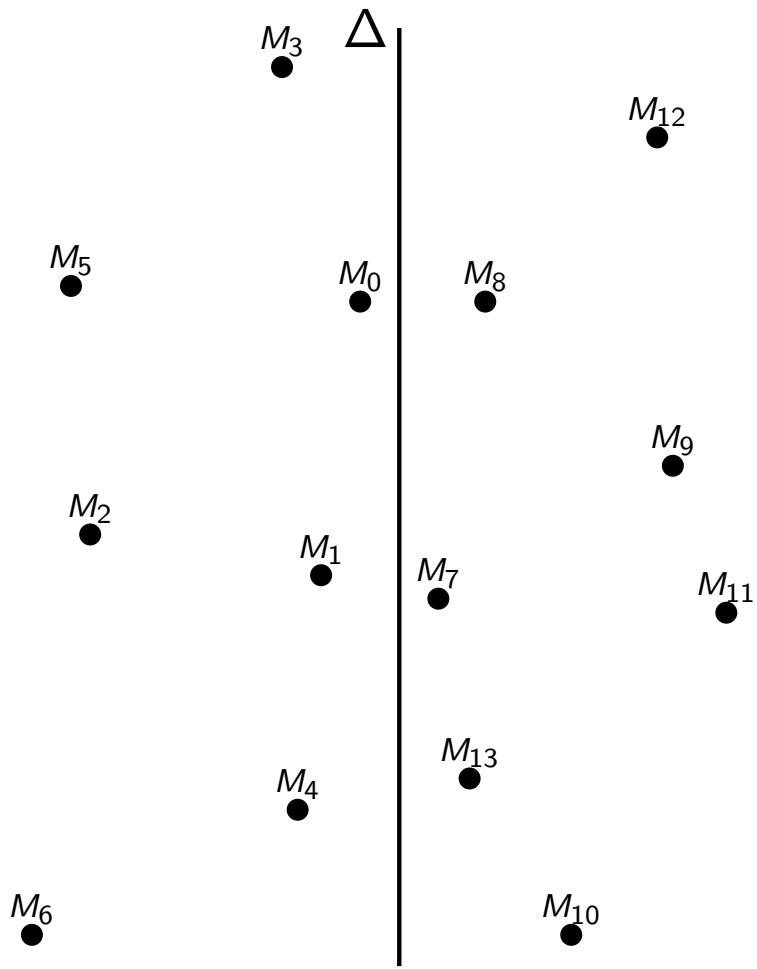
Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.

Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)



Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.

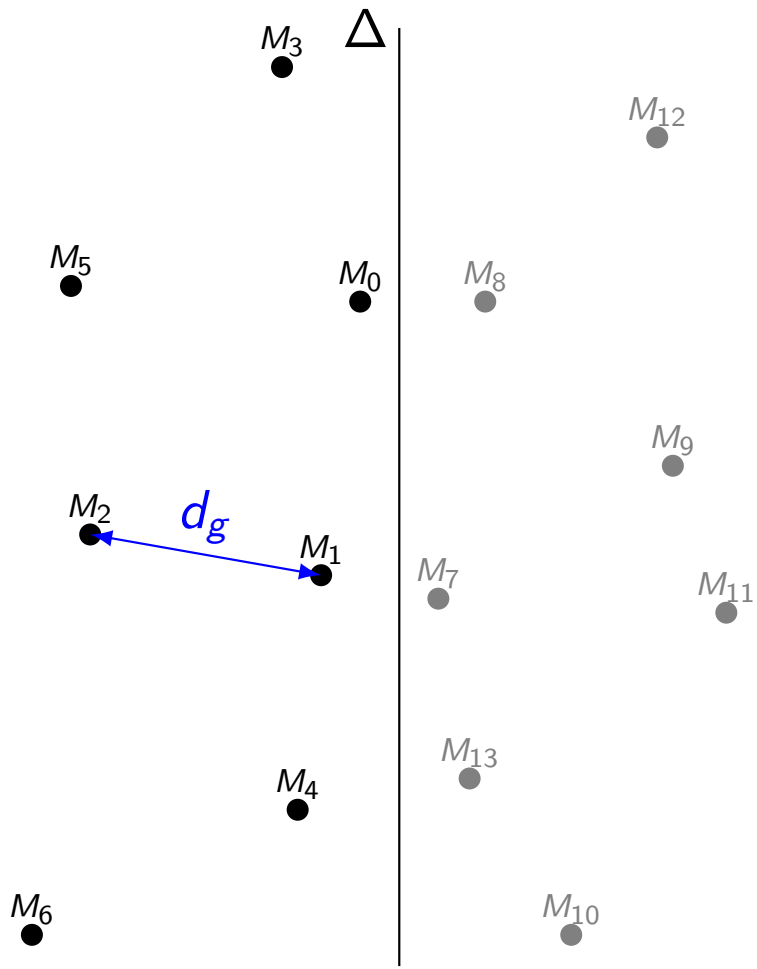
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



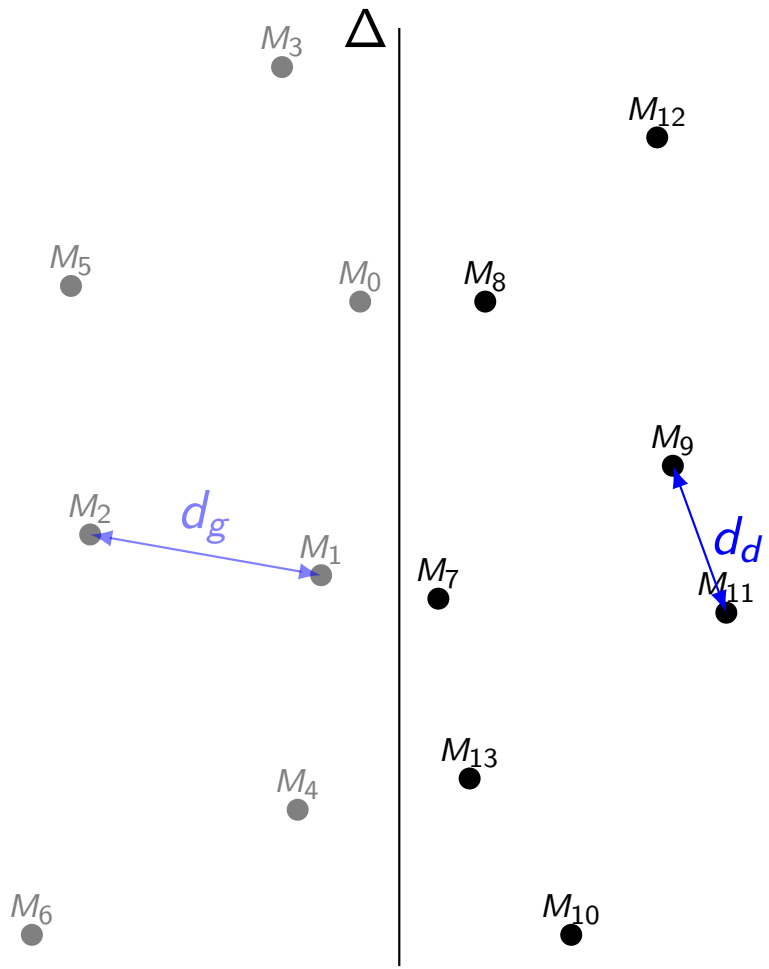
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



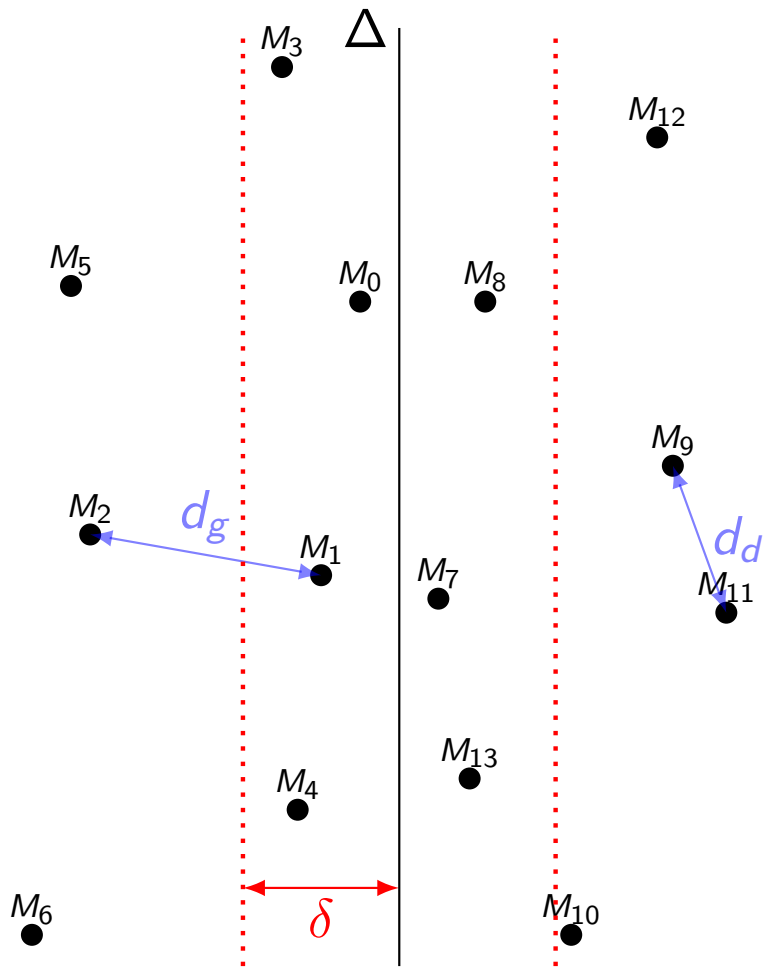
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



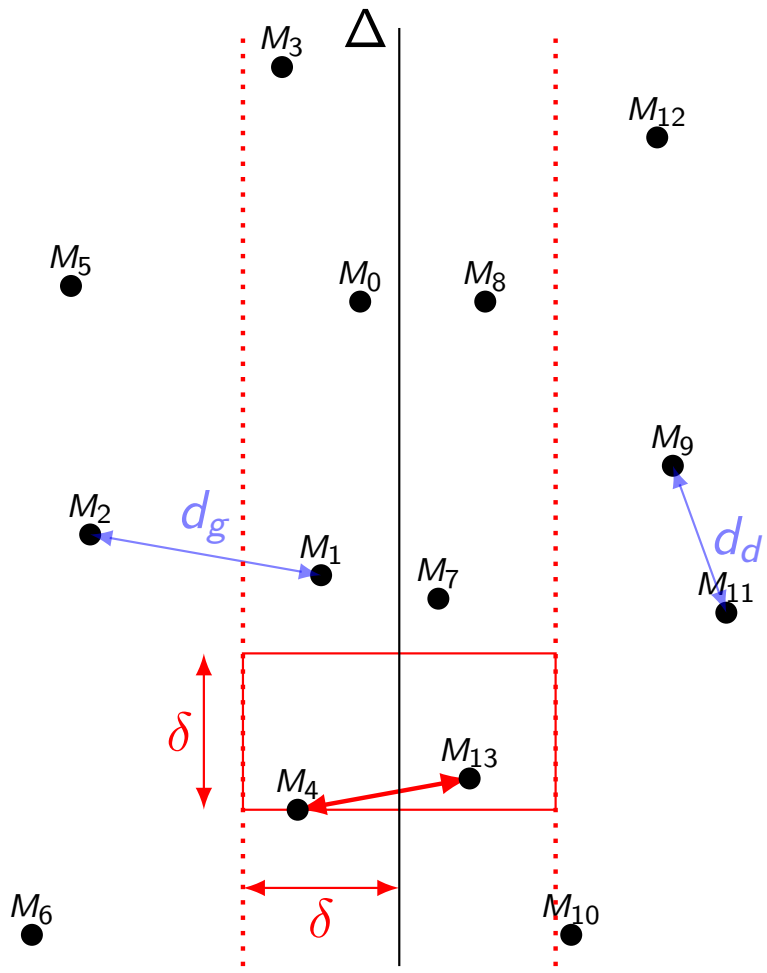
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



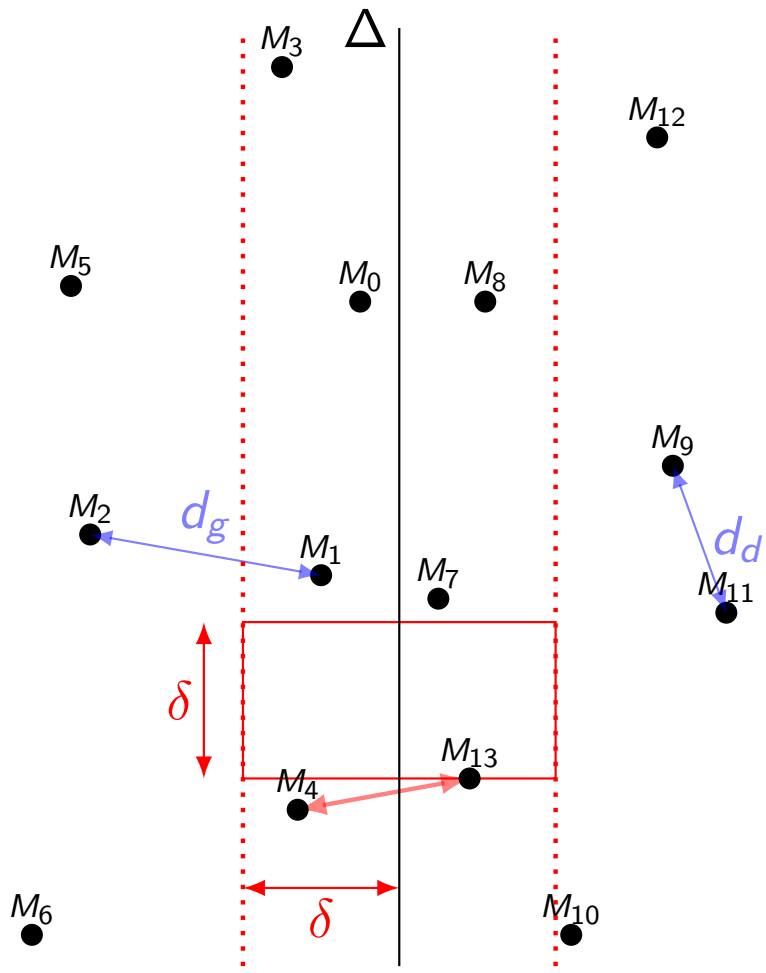
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



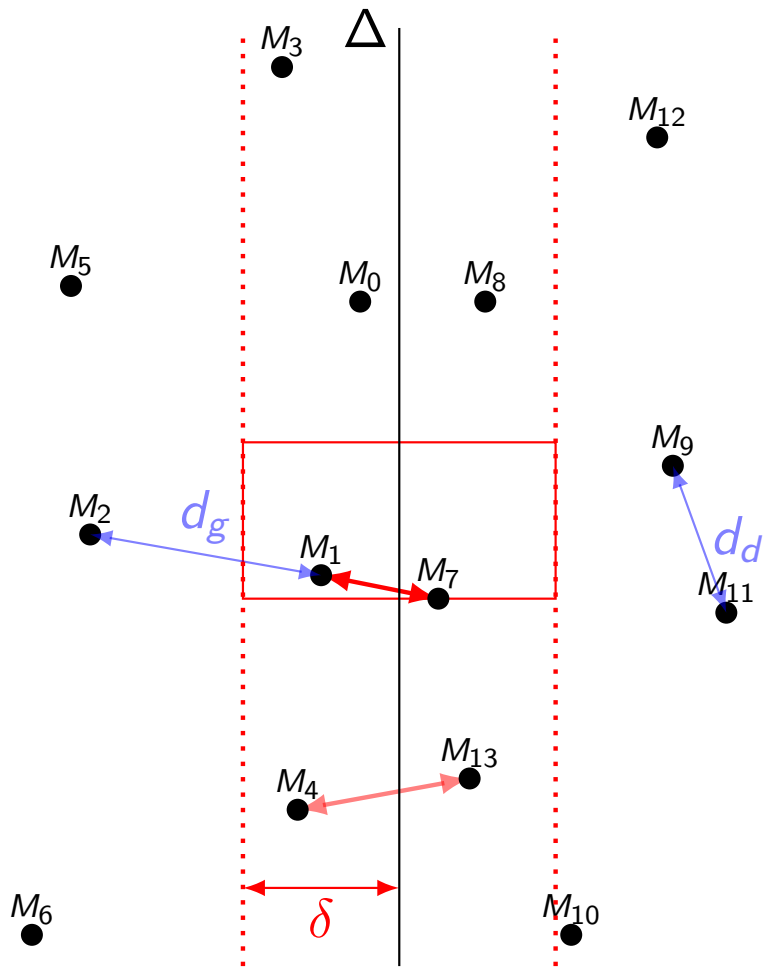
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



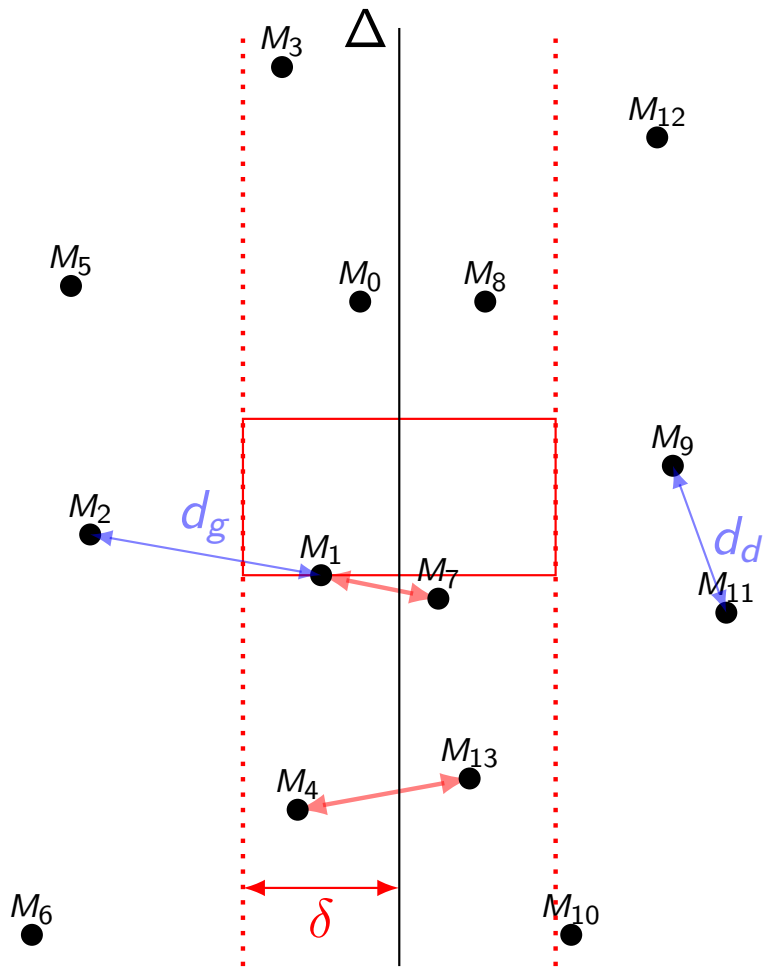
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



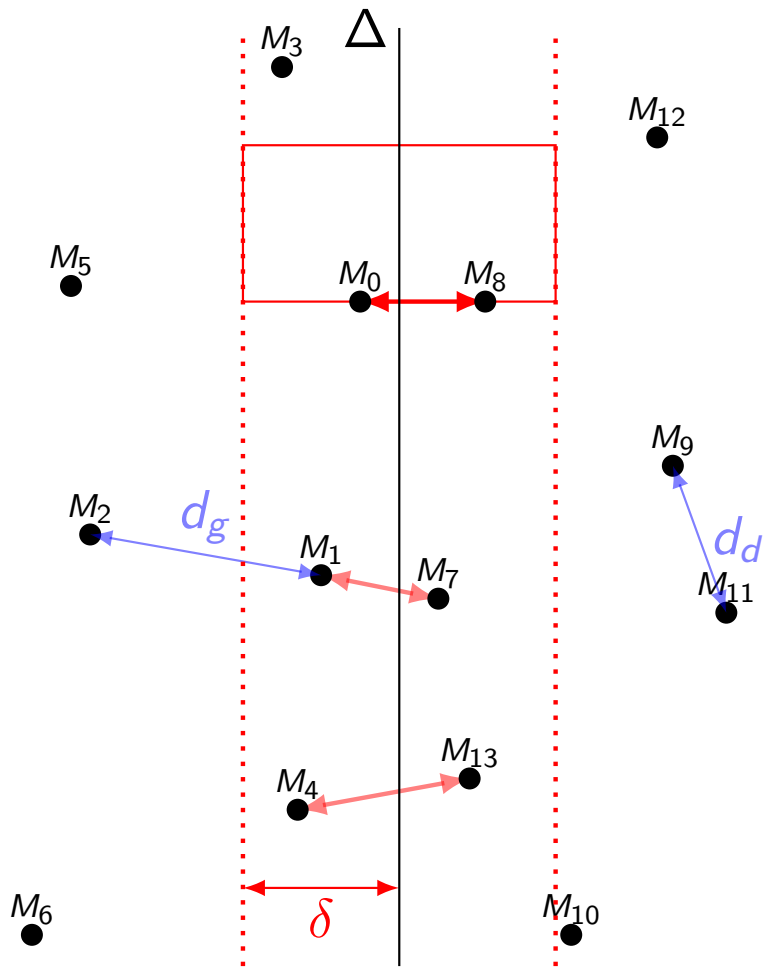
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



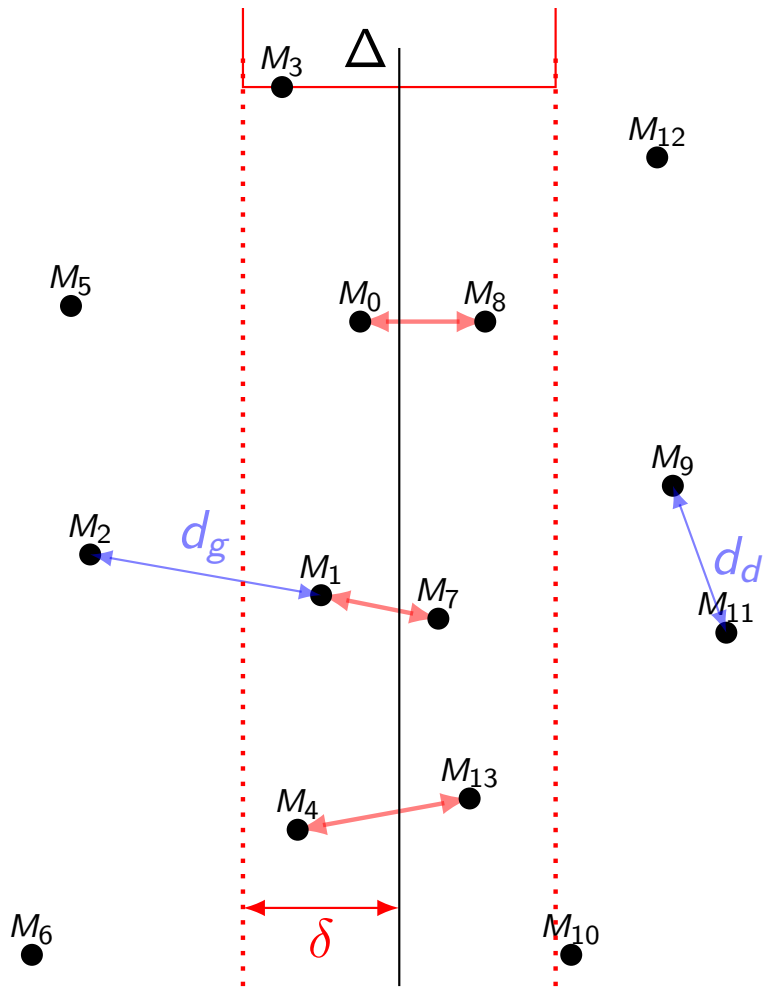
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



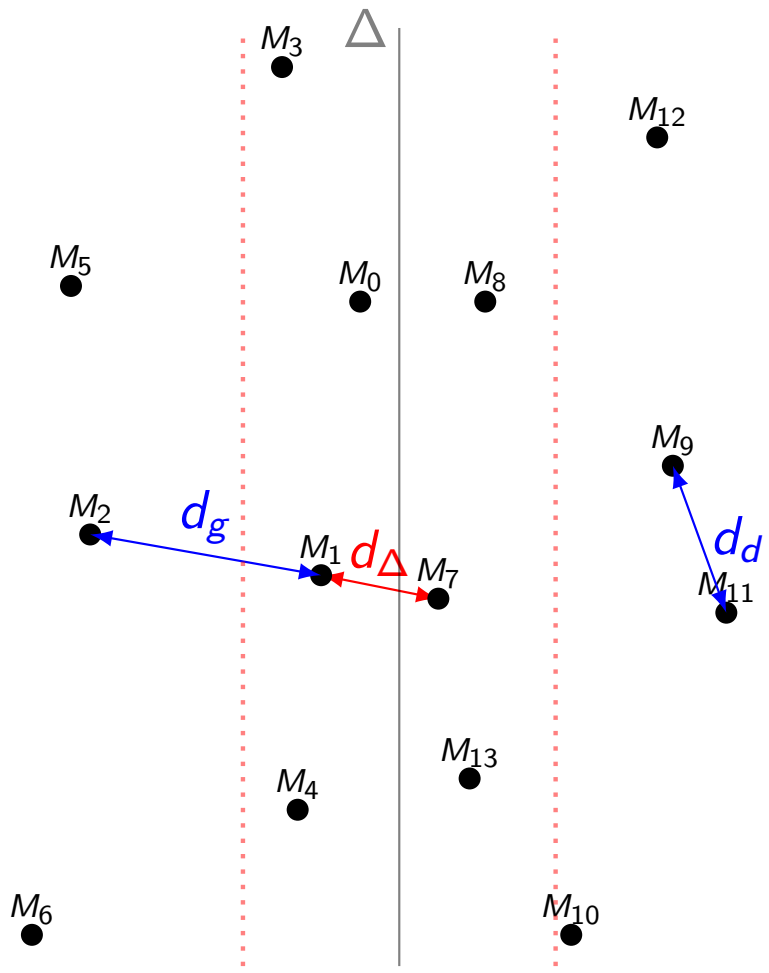
Plus proches points du plan euclidien

Entrée : points $(M_i)_{i \leq n}$.
Sortie : $\min_{i \neq j} d(M_i, M_j)$.
Complexité : $O(n \log n)$.

(Ex : UVa10245, UVa11378)

Algorithme diviser pour régner

- Classer les points par abscisse croissante.
  Les scinder par la droite médiane Δ.
- Résoudre à gauche et à droite récursivement. Minima : d_g et d_d.
- Dans une fenêtre balayante de taille $(2\delta, \delta)$, où $\delta = \min(d_g, d_d)$, centrée en Δ, chercher la distance minimum d_Δ entre un point gauche et droit.
- Renvoyer $\min(d_g, d_d, d_\Delta)$.



Crédits

- Transparents développés pour la préparation au concours à Hong Kong University 2010 : `http://i.cs.hku.hk/~provinci/`
- Dessins sphériques : `http://tex.stackexchange.com/questions/46850/`
- [Halim&Halim, *Competitive programming 3*] pour les pointeurs vers UVa