Exercices de khôlle - semaine 4, groupe 11

Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des triplets de points alignés du plan $\mathscr{P}$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une partie fermée, non bornée et connexe par arcs des triplets de points du plan.

Partie fermée Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathscr{P}^3$. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\overrightarrow{\mathrm{AC}})| \leq |\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}|$, avec égalité si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si les points A, B et C sont alignés. Posons donc l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) & \longmapsto & |(\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\overrightarrow{\mathrm{AC}})| - |\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}| \end{array}$$

L'application f est continue, et $\mathscr{T}$ est l'image réciproque du singleton $\{0\}$ de $\mathbf{R}$ par f. Comme $\{0\}$ est fermé dans $\mathbf{R}$, $\mathscr{T}$ est fermé.

Partie non bornée Soit r un réel strictement positif. Il est immédiat que, pour tout couple de points (A, B) de la boule de centre 0 et de rayon r, on peut construire un point C de la droite (AB) se trouvant à l'extérieur de la boule. On en déduit que $\mathscr{T}$ est non borné.

Partie connexe par arcs Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}), (\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}) \in \mathscr{T}$. Quitte à permuter, on peut supposer que $\mathrm{B} \in [\mathrm{AC}]$ et $\mathrm{E} \in [\mathrm{DF}]$. Il existe donc $\beta, \epsilon \in [0, 1]$ tels que :

$$\mathrm{B} = \beta\mathrm{A} + (1 - \beta)\mathrm{C}$$

$$\mathrm{E} = \epsilon\mathrm{D} + (1 - \epsilon)\mathrm{F}$$

Considérons à présent les applications continues :

$$\chi : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ t & \longmapsto & t\epsilon + (1 - t)\beta \end{array}$$

$$\phi : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & t\mathrm{D} + (1 - t)\mathrm{A} \end{array}$$

$$\psi : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & t\mathrm{F} + (1 - t)\mathrm{C} \end{array}$$

$$\omega : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ t & \longmapsto & \chi(t)\phi(t) - (1 - \chi(t))\psi(t) \end{array}$$

On a par construction $\omega(t) \in [\phi(t)\psi(t)]$ pour tout $t \in [0, 1]$. Posons donc l'application continue :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathscr{T} \\ t & \longmapsto & (\phi(t), \omega(t), \psi(t)) \end{array}$$

On vérifie que $\gamma(0) = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ et que $\gamma(1) = (\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$, d'où la connexité par arcs de $\mathscr{T}$.

Soit E $= (\mathrm{C}[0,1], ||\cdot||_\infty)$, et D l'ensemble des fonctions dérivables de E.

1. Montrer que $\overset{\circ}{\mathrm{D}} = \emptyset$.
2. Montrer que D n'est pas fermé.

1. Procédons par l'absurde. Supposons que $\overset{\circ}{\mathrm{D}}$ ne soit pas vide. Soit $f \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}$. Il existe un réel r strictement positif tel que $\mathrm{B}(f,r) \subset \mathrm{D}$. Cependant, considérons la fonction :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(t) + \frac{\sqrt{t}}{2r} \end{array}$$

Par application de l'inégalité triangulaire, on a $||\tilde{f}||_\infty < ||f||_\infty + \frac{1}{r}$ d'où $\tilde{f} \in \mathrm{B}(f,r)$ et $\tilde{f} \in \mathrm{D}$, ce qui est absurde car $\tilde{f}$ est non dérivable en zéro par construction. $\overset{\circ}{\mathrm{D}}$ est donc vide.

2. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}\ \{0\}}$ définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t + \frac{1}{n^2}} \end{array}$$

On a $f_n \in \mathrm{D}$ pour tout entier naturel n non nul, car la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Cependant, la suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$$

En effet, soit ϵ un réel strictement positif. Posons $A = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$. Soit $t \in [0,1]$. On a alors :

$$f_A(t) - f(t) \leq \sqrt{t+\epsilon^2} - \sqrt{t} \leq \frac{\epsilon^2}{\sqrt{t} + \sqrt{t+\epsilon^2}} \leq \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2}} \leq \epsilon$$

D'où $||f_A - f||_\infty \leq \epsilon$. La suite de fonctions (f_n) converge donc bien vers f qui n'est pas dérivable. Ainsi, D n'est pas fermé.