Exercices de khôlle - semaine 13, groupe 11

Exercice 1 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbf{R}-$espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E telle que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ vérifiant $i \neq j$, on ait $\langle e_i, e_j \rangle < 0$. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, et soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x, e_i \rangle > 0$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i > 0$.

Cherchons dans un premier temps à démontrer la positivité large des x_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en examinant la différence des normes des deux quantités suivantes :

$$\begin{aligned} y &= -x + \sum_{i=1}^n |x_i| e_i \\ 0 &= -x + \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{aligned}$$

Écrivons la différence des normes :

$$\|y\|^2 - 0 = \left\| -x + \sum_{i=1}^n |x_i| e_i \right\|^2 - \left\| -x + \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|^2$$

En développant le produit scalaire d'où provient la norme (pour tout $a \in E$, $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle$), en exploitant la bilinéarité du produit scalaire et en regroupant les termes, cette égalité se récrit :

$$\|y\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - |x_i|) \langle x, e_i \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n |x_i| e_i, \sum_{i=1}^n |x_i| e_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle$$

Développons les deux produits scalaires, et récrivons-les à l'aide d'une somme double. Nous obtenons :

$$\|y\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - |x_i|) \langle x, e_i \rangle + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (|x_i| \cdot |x_j| - x_i x_j) \langle e_i, e_j \rangle$$

Séparons les cas où $i = j$ et ceux où $i \neq j$:

$$\|y\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - |x_i|) \langle x, e_i \rangle + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} (|x_i| \cdot |x_j| - x_i x_j) \langle e_i, e_j \rangle + \sum_{k=1}^n (|x_k|^2 - x_k^2) \|e_k\|$$

La dernière somme est nulle ; ainsi :

$$\|y\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - |x_i|) \langle x, e_i \rangle + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} (|x_i| \cdot |x_j| - x_i x_j) \langle e_i, e_j \rangle$$

Or, le membre de gauche est positif, et par application des hypothèses de l'énoncé, les deux termes du membre de droite sont négatifs. Ainsi, tous deux sont nuls, ce qui nécessite que $x_i = |x_i|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. D'où la positivité (large) des x_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Démontrons à présent leur stricte positivité. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} x_i \langle e_i, e_j \rangle + x_j \|e_j\|^2$$

Or, le membre de gauche est strictement positif, et d'après le résultat précédemment démontré et les hypothèses de l'énoncé, le premier terme du membre de droite est négatif ou nul. Le second terme du membre de droite doit donc être strictement positif, d'où la non-nullité de x_j. Ainsi, $x_j > 0$.

On a donc $x_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 2 Soit K un corps, et E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\phi : E \times E \to K$ une forme bilinéaire vérifiant $\phi(x, y) = 0 \implies \phi(y, x) = 0$. Montrer que ϕ est symétrique ou antisymétrique.

Supposons dans un premier temps que ϕ est non dégénérée. Pour tout $z \in E$, notons les applications :

$$\phi(z, \cdot) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ y & \longmapsto & \phi(z, y) \end{array}$$

$$\phi(\cdot, z) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \phi(x, z) \end{array}$$

Posons ensuite :

$$\Phi_\sigma : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \phi(x, \cdot) \end{array}$$

$$\Phi_\delta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ y & \longmapsto & \phi(\cdot, y) \end{array}$$

L'hypothèse sur ϕ donnée par l'énoncé peut se récrire : pour tout z, les applications $\phi(z, \cdot)$ et $\phi(\cdot, z)$ ont même noyau. Ainsi, comme il s'agit de formes linéaires, elles sont proportionnelles. Du fait de leur non-nullité (car ϕ a été supposée non dégénérée), pour tout $z \in E$, il existe un scalaire λ_z (dépendant de z) tel que $\phi(z, \cdot) = \lambda_z \phi(\cdot, z)$. Ainsi, $\Phi_\sigma(z) = \lambda_z \Phi_\delta(z)$. Comme ϕ est non dégénérée, le noyau des applications Φ_σ et Φ_δ est réduit à 0 ; elles sont donc bijectives, et on peut écrire $\left(\Phi_\delta^{-1} \circ \Phi_\sigma\right)(z) = \lambda_z z$ pour tout $z \in E$. L'application $\Phi_\delta^{-1} \circ \Phi_\sigma$ laisse donc stable toutes les droites de E^* ; d'après un résultat hors programme, il s'agit d'une homothétie, et la constante λ_z est en fait indépendante de z. Il existe donc une constante $\lambda \in K$ telle que $\Phi_\sigma = \lambda \Phi_\delta$, soit, pour tous $x, y \in E$, $\phi(x, y) = \lambda \phi(y, x)$.

Mais en appliquant à nouveau ce procédé, on obtient $\phi(y, x) = \lambda \phi(x, y)$ d'où $\phi(x, y) = \lambda^2 \phi(x, y)$. Ainsi, $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda = 1$ (et ϕ est symétrique) ou $\lambda = -1$ (et ϕ est antisymétrique).

Si ϕ est quelconque, soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(\phi)$ (le noyau de ϕ est défini sans ambiguïté, car l'hypothèse faite par l'énoncé garantit que ses noyaux à gauche et à droite sont les mêmes). Soient $x, y \in E$; il existe $x_1, y_1 \in \operatorname{Ker}(\phi)$, $x_2, y_2 \in F$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. En exploitant la bilinéarité de ϕ, on obtient $\phi(x, y) = \phi(x_1, y_1) + \phi(x_1, y_2) + \phi(x_2, y_1) + \phi(x_2, y_2)$. Mais comme x_1 et y_1 appartiennent au noyau de ϕ, on a $\phi(x, y) = \phi(x_2, y_2)$. Ainsi, l'application du procédé précédent à la restriction de ϕ à F, qui est non dégénérée, permet de conclure dans le cas général.