Exercices de khôlle - semaine 14, groupe 11

Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension n. Déterminer l'ensemble des endomorphismes u de E qui sont nilpotents et normaux.

Lemme - Tout endomorphisme symétrique nilpotent est nul.
Démonstration - Soit f un tel endomorphisme. Il est symétrique donc diagonalisable (par application du théorème spectral), et les coefficients de la matrice diagonale sont ses valeurs propres. Mais la nilpotence de f garantit que 0 est sa seule valeur propre, d'où sa nullité.

Soit u un endomorphisme nilpotent et normal. Soit n un entier naturel tel que $u^n = 0$. $u^* \circ u$ est un endomorphisme symétrique car $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u$, et on a $(u^* \circ u)^n = u^n \circ (u^*)^n$ car u est normal, d'où la nullité de $(u \circ u^*)^n$ et la nilpotence de $u^* \circ u$, qui est donc nul d'après le lemme.
Soit $x \in E$. On a $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, (u^* \circ u)(x) \rangle = 0$, d'où $u(x) = 0$. Ainsi, $u = 0$. Le seul endomorphisme nilpotent et normal est donc l'endomorphisme nul.