Exercice de khôlle - semaine 1, groupe 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^+}$ une suite réelle décroissante qui tend vers 0.

1. Montrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} p^n u_{p^n}$ converge.
2. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 1} \min\left(u_n, \frac{1}{n}\right)$ diverge.

1. Procédons en regroupant par paquets de p^n termes. Étant donné que le terme général de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est positif, celle-ci converge si et seulement si la suite $\sum_n \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k$ converge. Mais comme la suite (u_n) décroît, on a pour tout entier naturel k compris entre p^n et $p^{n+1}-1$ l'encadrement $u_{p^{n+1}-1} \leq u_k \leq u_{p^n}$. On obtient donc :

$$p^n u_{p^{n+1}-1} \leq \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leq p^n u_{p^n} \tag{1}$$

Ainsi, si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, $\sum_n \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k$ converge d'où $\sum_n p^n u_{p^{n+1}-1}$ converge d'après l'inégalité 1, par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs. On peut multiplier par p et décaler les indices sans modifier la nature de cette série, et on obtient donc que $\sum_{n\geq 1} p^n u_{p^n}$ converge. Réciproquement, si $\sum_{n\geq 1} p^n u_{p^n}$ converge, l'inégalité 1 indique que $\sum_{n\geq 1} \sum_{p=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k$ converge, d'où la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$. On obtient donc l'équivalence demandée.

2. Démontrons la contraposée de cette affirmation. Supposons que $\sum_{n\geq 1} \min\left(u_n, \frac{1}{n}\right)$ converge. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On obtient par application du résultat de la question 1 que $\sum_{n\geq 1} p^n \min\left(u_{p^n}, \frac{1}{p^n}\right)$ converge, c'est-à-dire que $\sum_{n\geq 1} \min\left(p^n u_{p^n}, 1\right)$ converge. Pour qu'il en soit ainsi, il faut donc que l'on ait à partir d'un certain rang n_0 l'inégalité $p^n u_{p^n} < 1$, soit $\min\left(u_{p^n}, 1\right) = u_{p^n}$ pour tout $n \geq n_0$. En récrivant la série précédente à partir du rang n_0, on obtient que la série $\sum_{n\geq n_0} p_n u_{p^n}$ converge, d'où la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Par contraposition, on obtient l'implication demandée.