Corrigé du test n°3 : Étude du circuit de Wien

Antoine Amarilli

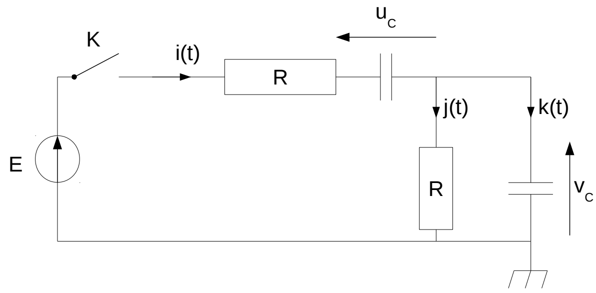

FIGURE 1 – Circuit de Wien

Nous avons affaire à un circuit du second ordre, dont le comportement sera de type apériodique car il n'y a qu'une forme d'énergie. Afin de déterminer $i(t)$, nous devons donc d'abord calculer les conditions initiales $i(0^+)$ et $i'(0^+)$. Après, en travaillant par élimination, nous obtiendrons une équation différentielle du second ordre, que nous résoudrons.

1 Détermination des conditions initiales

Les conditions initiales nécessaires pour identifier la solution de l'équation différentielle sont $i(0^+)$ et $i'(0^+)$. Nous déterminerons également $i(\infty)$ qui correspond au comportement du circuit après un temps très long.

1.1 Calcul de $i(0^+)$

Les condensateurs assurent la continuité de la tension, donc on a $u(0^+) = u(0^-) = 0$ et $v(0^+) = v(0^-) = 0$ car ils sont initialement déchargés. Nous pouvons donc les remplacer par des fils. La branche portant la résistance shuntée étant morte, nous obtenons :

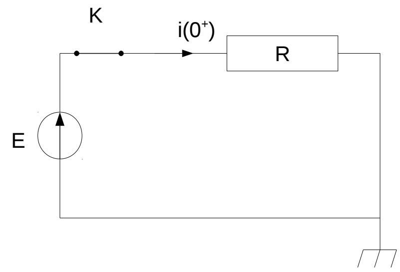

FIGURE 2 – Circuit de Wien en $t = 0^+$

Par application de la loi de Pouillet, nous pouvons calculer :

$$i(0^+) = \frac{E}{R} \tag{1}$$

1.2 Calcul de $i'(0^+)$

Par application de la loi des mailles et de la loi d'Ohm, nous obtenons :

$$Ri + U_C + V_C - E = 0 \tag{2}$$

Soit, en dérivant :

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{k}{C} = 0 \tag{3}$$

Or, on a $i = j + k$ et $j(0^+) = 0$ car la résistance est court-circuitée, d'où $k(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}$. On a donc :

$$i'(0^+) = -\frac{2i(0^+)}{RC} = -2\frac{E/R}{RC} \tag{4}$$

1.3 Calcul de $i(\infty)$

À la fin d'un régime transitoire, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Si l'on remplace les condensateurs par leur modèle équivalent, nous obtenons :

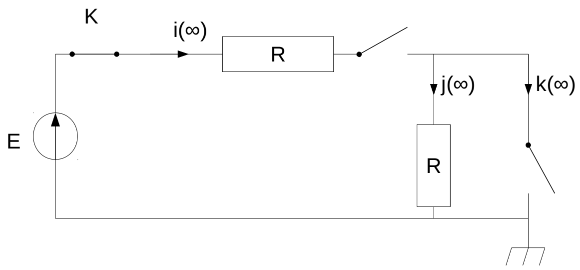

FIGURE 3 – Circuit de Wien en $t = +\infty$

On obtient donc $i(\infty) = 0$.

2 Obtention de l'équation différentielle

Travaillons par élimination. Par application de la loi des mailles, nous obtenons l'équation 3, et une deuxième équation :

$$Ri + U_C + Rj - E = 0 \tag{5}$$

Soit, en dérivant :

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + R\frac{dj}{dt} = 0 \tag{6}$$

Puis, par application de la loi des nœuds, nous obtenons une troisième équation :

$$i = j + k \tag{7}$$

On obtient d'après l'équation 3 :

$$k = -RC\frac{di}{dt} - i \tag{8}$$

Puis, d'après l'équation 7 :

$$j = 2i + RC\frac{di}{dt} \tag{9}$$

Enfin, d'après l'équation 6 :

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + R^2C\frac{d^2i}{dt^2} + 2R\frac{di}{dt} = 0 \tag{10}$$

L'équation différentielle finale est donc :

$$(RC)^2\frac{d^2i}{dt^2} + 3RC\frac{di}{dt} + i = 0 \tag{11}$$

3 Résolution de l'équation différentielle

3.1 Résolution sans conditions initiales

Réécrivons l'équation 11 de sorte à ce qu'elle soit de la forme $\frac{d^2y}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = y(\infty)$. Nous obtenons :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}i = 0 \tag{12}$$

On a $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $m = \frac{3}{2}$. Nous sommes donc bien en régime apériodique, car $m > 1$. On remarque également qu'on a bien $y(\infty) = 0$ comme trouvé précédemment.

Posons le polynôme caractéristique $x^2 + 2m\omega_0 x + \omega_0^2$. Son discriminant est $\Delta = (2m\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = (m^2-1)\omega_0^2$. Comme $m > 1$, le discriminant est positif et le polynôme admet les racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1} \\ x_2 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1} \end{cases}$$

Posons $\omega = \omega_0\sqrt{m^2-1}$. Comme l'équation 12 est homogène, sa solution est (avec A, B des constantes réelles) :

$$i(t) = Ae^{(-m\omega_0-\omega)t} + Be^{(-m\omega_0+\omega)t} \tag{13}$$

Celle-ci peut se récrire sous la forme (avec λ, μ des constantes réelles) :

$$i(t) = e^{-m\omega_0 t}(\lambda\cosh(\omega t) + \mu\sinh(\omega t)) \tag{14}$$

3.2 Application des conditions initiales

On a d'après les équations 1 et 14 :

$$e^0(\lambda\cosh(0) + \mu\sinh(0)) = \frac{E}{R} \tag{15}$$

On en déduit :

$$\lambda = \frac{E}{R} \tag{16}$$

On calcule d'après l'équation 14 :

$$i(0^+) = -m\omega_0\lambda + \mu\omega_0\sqrt{m^2-1} \tag{17}$$

Or d'après l'équation 4, on obtient :

$$-m\omega_0\lambda + \mu\omega = -2\frac{E/R}{RC} \tag{18}$$

Soit, après simplification :

$$\mu = \frac{-E}{\sqrt{5}R} \tag{19}$$

On obtient donc l'expression :

$$i(t) = e^{-m\omega_0 t}\left(\frac{E}{R}\cosh(\omega t) - \frac{E}{\sqrt{5}R}\sinh(\omega t)\right) \tag{20}$$

Soit *in fine*, avec $m = \frac{3}{2}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{m^2-1}$:

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-m\omega_0 t}\left(\cosh(\omega t) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sinh(\omega t)\right) \tag{21}$$