

Corrigé de la Composition de Physique n°1

Antoine Amarilli

1 Lemmes mathématiques

Lemme 1 En intégrant l'inégalité $|f| \leq M$, on obtient $\int_a^b |f(u) du| \leq \int_a^b M du$. On a $\int_a^b M du = M(b-a)$. Par application de l'inégalité triangulaire, on a $\int_a^b |f(u) du| \leq |\int_a^b f(u) du|$, d'où il vient $\int_a^b |f(u) du| \leq M(b-a)$ (ce résultat peut également être obtenu par des considérations géométriques en examinant l'aire sous la courbe des fonctions considérées). Par application du théorème d'encadrement, on déduit que $\lim M(b-a) = 0$ implique $\lim \int_a^b |f(u) du| = 0$.

Lemme 2 Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{y(\infty)}{\tau}$. Sans application des conditions initiales, ses solutions sont de la forme $y = y_{SP} + y_{SEH}$, avec y_{SP} une solution particulière de l'équation et y_{SEH} la solution de l'équation générale de l'équation homogène.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = 0$ est $p + \frac{1}{\tau} = 0$ dont la racine est $p = -\frac{1}{\tau}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_{SEH}(t) = \lambda e^{(-\frac{1}{\tau})t}$ avec λ une constante réelle.

Par ailleurs, une solution particulière de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{y(\infty)}{\tau}$ est $y_{SP}(t) = y(\infty)$, en effet $\frac{dy_{SP}}{dt} + \frac{y_{SP}}{\tau} = 0 + \frac{y(\infty)}{\tau} = \frac{y(\infty)}{\tau}$.

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{y(\infty)}{\tau}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$y(t) = \lambda e^{(-\frac{1}{\tau})t} + y(\infty) \quad (1)$$

Par application des conditions initiales, comme $y(0^+) = \lambda e^{(-\frac{0}{\tau})t} + y(\infty)$, on a $\lambda = y(0^+) - y(\infty)$. La solution de l'équation différentielle est donc :

$$y(t) = (y(0^+) - y(\infty)) e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty) \quad (2)$$

2 Réponse d'un circuit linéaire du premier ordre

1. Obtention d'une discontinuité apparente.

(i) Par application de la loi des mailles et de la loi d'Ohm, on a :

$$E(t) = Ri(t) + V_c(t) \quad (3)$$

Comme $i(t) = C \frac{dV_c}{dt}$, en posant $\tau = RC$, on aboutit à l'équation différentielle :

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{\tau} = \frac{E(t)}{\tau} \quad (4)$$

Dans le cas où $E(t) = E$ (constant), la solution de l'équation différentielle 4 est :

$$V_c(t) = (y(0^+) - E) e^{-\frac{t}{\tau}} + E \quad (5)$$

On place l'origine des temps au début du régime transitoire correspondant à la fermeture de K. Le condensateur étant initialement déchargé, on a $V_c(0^-) = 0$, d'où $V_c(0^+) = 0$ car le condensateur assure la continuité de la tension. En remplaçant dans la relation 5, on obtient :

$$V_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (6)$$

On a $i(t) = C \frac{dV_c}{dt} = C \frac{E e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$, d'où :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7)$$

Les graphes de $V_c(t)$ et de $i(t)$ sont donnés en figures 1 et 3 respectivement, leurs diagrammes de phase en figures 2 et 4 respectivement.

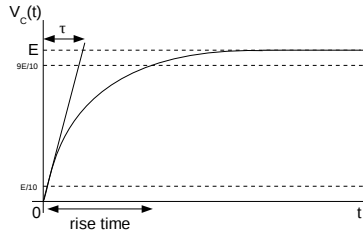


FIGURE 1 – Graphe de $V_c(t)$

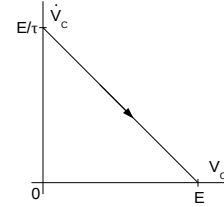


FIGURE 2 – Diagramme de phase de $V_c(t)$

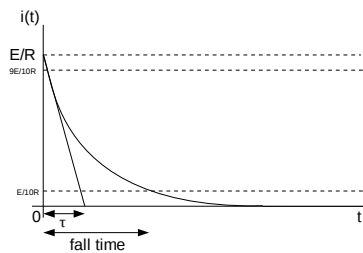


FIGURE 3 – Graphe de $i(t)$

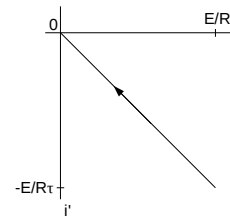


FIGURE 4 – Diagramme de phase de $i(t)$

La puissance reçue par le condensateur vaut $P_c(t) = V_c(t) i(t) = CV_c(t) \frac{dV_c}{dt}$. L'énergie reçue par le condensateur de 0^+ à ∞ vaut $E_c = \int_{0^+}^{\infty} P_c(s) ds = \frac{1}{2} CV_c(\infty)^2 - \frac{1}{2} CV_c(0^+)^2 = \frac{1}{2} CE^2$ car le condensateur est initialement déchargé.

La puissance délivrée par le générateur vaut $P_g(t) = E(t) i(t) = CE \frac{dV_c}{dt}$. L'énergie délivrée par le générateur de 0^+ à ∞ vaut $E_g = \int_{0^+}^{\infty} P_g(s) ds = CE V_c(\infty) - CE V_c(0) = CE^2$ car le condensateur est initialement déchargé.

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est donc stockée par le condensateur.

Applications numériques : $E_c = 1.25 \cdot 10^{-5} J$ et $E_g = 2.5 \cdot 10^{-5} J$

(ii) Pour $0 \leq t \leq T$, on peut réécrire l'équation différentielle 4 sous la forme :

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{\tau} = \frac{E}{T} \quad (8)$$

Pour $t \geq T$, V_c , on peut réécrire l'équation différentielle 4 sous la forme :

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad (9)$$

La solution de l'équation homogène associée à 8 est $y_{SEH} = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec λ une constante réelle. Cherchons une solution particulière de la forme $y_{SP1} = at + b$ avec a et b des nombres réels. On obtient en injectant dans 8 $a + \frac{at}{\tau} + \frac{b}{\tau} = \frac{E}{T}$, soit par identification $y_{SP1} = \frac{E}{T}t - \frac{E}{T}\tau = \frac{E}{T}(t - \tau)$. La solution de l'équation différentielle 8 est donc $y_1(t) = y_{SEH}(t) + y_{SP1} = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{T}(t - \tau)$. On a selon les conditions initiales $y(0^+) = 0$ soit $\lambda - \tau \frac{E}{T} = 0$ ou encore $\lambda = \tau \frac{E}{T}$. Il vient donc :

$$y_1(t) = \frac{E}{T} \left(\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + t - \tau \right) \quad (10)$$

Effectuons un changement de l'origine des dates en posant $t' = t - T$. La solution de l'équation différentielle 9 est alors $y_2(t') = (y_2(0^+) - y_2(\infty))e^{-\frac{t'}{\tau}} + y_2(\infty)$. Comme le condensateur assure la continuité de la tension, on a $y_2(0^+) = y_2(0^-) = y_1(T) = \frac{E}{T} \left(\tau e^{-\frac{T}{\tau}} + T - \tau \right)$. On a donc :

$$y_2(t) = \left(\frac{E}{T} \left(\tau e^{-\frac{T}{\tau}} + T - \tau \right) - E \right) e^{-\frac{(t-T)}{\tau}} + E \quad (11)$$

L'allure de $V_c(t)$ est donnée en figure 5.

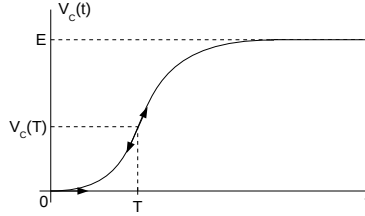


FIGURE 5 – Allure de $V_c(t)$

Montrons qu'il est possible d'obtenir une discontinuité pour T suffisamment petit.

On a $V_c(T) = \frac{E}{T} \left(\tau e^{-\frac{T}{\tau}} + T - \tau \right)$, soit, d'après le développement limité $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ à proximité de 0 :

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} V_c(T) = \frac{E}{T} \left(\tau \left(1 - \frac{T}{\tau} + \frac{T^2}{2\tau^2} \right) + T - \tau \right) = \frac{E T^2}{T 2\tau} = \frac{S}{2\tau} \quad (12)$$

Il y a donc discontinuité à l'échelle de la précision expérimentale. En effet, $V_c(0^-) = 0$ semble différent de $V_c(0^+) = \frac{S}{2\tau}$ lors de la mesure.

En intégrant l'équation différentielle 8 entre 0 et T , on obtient :

$$\int_0^T V_c'(s) ds + \int_0^T \frac{V_c(s)}{\tau} ds = \frac{ET}{2\tau} \quad (13)$$

Une primitive de $V_c'(s)$ est $V_c(s)$, on obtient donc :

$$V_c(T) - V_c(0^-) + \frac{1}{\tau} \int_0^T V_c(s) ds = \frac{ET}{2\tau} \quad (14)$$

Or on a $|V_c(s)| \leq V_c(T)$. D'après le lemme 1, on a $\int_0^T |V_c(s) ds| \leq T V_c(T)$ et, comme $\lim T V_c(T) = 0$, $\lim \int_0^T V_c(s) ds = 0$. On peut donc récrire la relation 14 :

$$V_c(T) - V_c(0^-) = \frac{S}{2\tau} \quad (15)$$

Pour $T \rightarrow 0$, cela correspond bien à une discontinuité en 0.

(iii) Comme $T_1 \gg \tau$, en T_1 , la tension $V_c(t)$ a presque atteint E .

Pour $T_1 \leq t \leq T_1(1 + \epsilon)$, $V_c(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\tau V_c' + V_c = -2E_1 \quad (16)$$

Intégrons-la de T_1 à $T_1(1 + \epsilon)$. On obtient :

$$\tau (V_c(T_1(1 + \epsilon)) - V_c(T_1)) + \int_{T_1}^{T_1(1 + \epsilon)} V_c(s) ds = -2E_1(T_1(1 + \epsilon)) + 2E_1 T_1 \quad (17)$$

Comme précédemment, d'après le lemme 1, on a, pour $\epsilon \rightarrow 0$, $\int_{T_1}^{T_1(1 + \epsilon)} V_c(s) ds = 0$ car $V_c(s) \leq E$. On obtient donc :

$$V_c(T_1^+) - V_c(T_1^-) = -\frac{S_1}{\tau} \quad (18)$$

Il y a discontinuité apparente en T_1 . Deux allures possibles pour V_c sont données en figures 6 et 8, et leurs diagrammes de phases respectifs en figures 7 et 9.

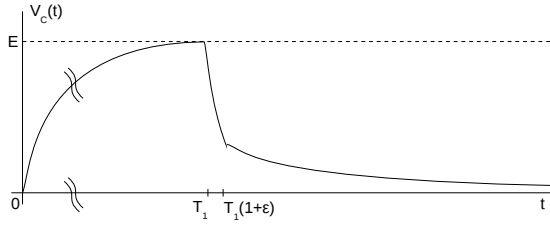


FIGURE 6 – Première allure possible pour V_c

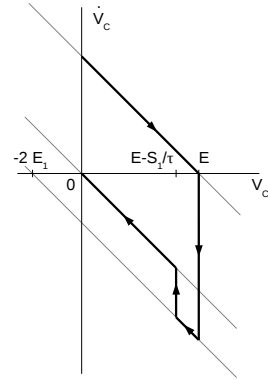


FIGURE 7 – Diagramme de phase correspondant

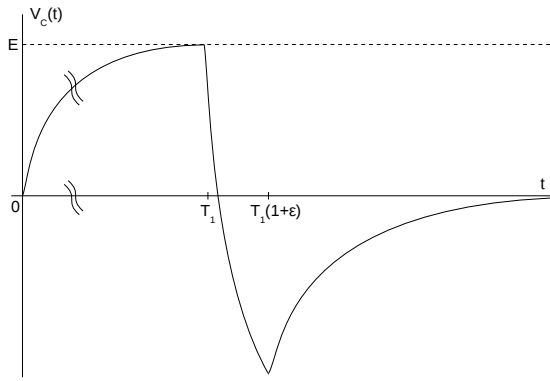


FIGURE 8 – Seconde allure possible pour V_c

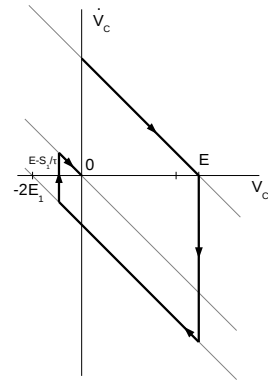


FIGURE 9 – Diagramme de phase correspondant

2. Réponse à une entrée périodique.

(i) Supposons que V_c n'est pas T-périodique. Sa dérivée $\frac{dV_c}{dt}$ n'est donc pas T-périodique, et $\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{\tau}$ n'est pas non plus T-périodique. Or on a (équation différentielle 4) $\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{\tau} = \frac{E(t)}{\tau}$, où $\frac{E(t)}{\tau}$ est T-périodique, ce qui est absurde. V_c est donc T-périodique. On la note $V_{c,part}$.

(ii) En intégrant l'équation différentielle 4 de 0 à T, on obtient :

$$\int_0^T V'_{c,part}(t) dt + \int_0^T \frac{V_{c,part}}{\tau} dt = \int_0^T \frac{E(t)}{\tau} dt \quad (19)$$

Une primitive de $V'_{c,part}(t)$ est $V_{c,part}(t)$, nous obtenons donc :

$$V_{c,part}(T) - V_{c,part}(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^T V_{c,part} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^T E(t) dt \quad (20)$$

Comme $V_{c,part}$ est T-périodique, on a $V_{c,part}(T) = V_{c,part}(0)$. En multipliant par $\frac{\tau}{T}$, on obtient :

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_{c,part} dt = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \quad (21)$$

Cela correspond bien à :

$$\langle V_{c,part}(t) \rangle = \langle E(t) \rangle \quad (22)$$

(iii) En régime permanent, on a $V_c(t) \approx V_{c,part}(t)$. Comme elle est T-périodique, étudions V_c de 0 à T (en plaçant l'origine des temps telle que $E(0^-) = 0$ et $E(0^+) = E$). La tension V_c (et donc sa restriction à $[0, T]$) a pour valeur moyenne $\langle V_c(t) \rangle = \langle E(t) \rangle = \frac{E}{2}$, elle est continue à cause du condensateur, et elle vérifie sur $[0, \frac{T}{2}]$ l'équation différentielle $\tau \frac{dV_c}{dt} + V_c = E$, et sur $[\frac{T}{2}, T]$ l'équation différentielle $\tau \frac{dV_c}{dt} + V_c = 0$. On pose donc $V_{min} = V_c(0) = V_c(T) = \frac{E}{2} - \Delta_V$ et $V_{max} = V_c(\frac{T}{2}) = \frac{E}{2} + \Delta_V$, et d'après le lemme 2, V_c a pour expression :

$$V_c(t) = \begin{cases} (V_{min} - E)e^{-\frac{t}{\tau}} + E & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ V_{max}e^{-\frac{(t-\frac{T}{2})}{\tau}} & \text{pour } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (23)$$

Par ailleurs, on a $V_c(\frac{T}{2}) = V_{max}$. On a donc :

$$-\frac{E}{2}e^{-\frac{T}{2\tau}} - \Delta_V e^{-\frac{T}{2\tau}} + \frac{E}{2} = \Delta_V \quad (24)$$

On en déduit :

$$\Delta_V = \frac{E}{2} \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \quad (25)$$

Soit :

$$\Delta_V = \frac{E}{2} \frac{\sinh(\frac{T}{4\tau})}{\cosh(\frac{T}{4\tau})} \quad (26)$$

On obtient donc :

$$\Delta_V = \frac{E}{2} \tanh\left(\frac{T}{4\tau}\right) \quad (27)$$

Soit :

$$V_{min} = \frac{E}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{T}{4\tau}\right)\right) \quad (28)$$

$$V_{max} = \frac{E}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{T}{4\tau}\right)\right) \quad (29)$$

L'allure de V_c est donnée en figure 10, et son diagramme de phase en figure 11.

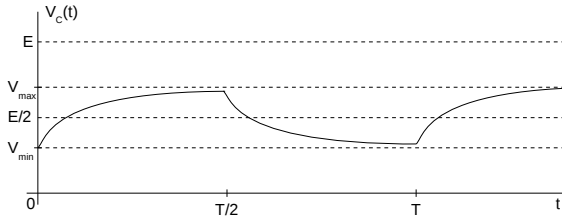


FIGURE 10 – Graphe de V_c pour une entrée périodique

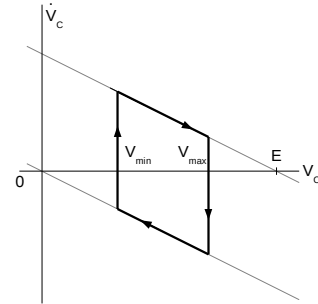


FIGURE 11 – Diagramme de phase

3 Question de cours

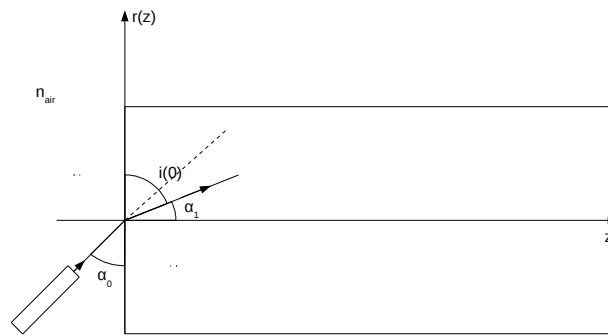


FIGURE 12 – Entrée du rayon dans la fibre

Lemme de Snell La fibre d'optique à gradient d'indice peut être considérée comme une suite de strates de verre (voir figure 13). Par application des lois de Snell, le rayon lumineux reste dans un même plan, et la suite de Snell définie par $S_k = n_k \sin i_k$ pour tout k entier naturel non nul avec n_k l'indice de réfraction de la strate et i_k l'angle d'incidence est une suite constante (en effet, les lois de Snell indiquent que $n_k \sin i_k = n_{k+1} \sin i_{k+1}$). En remplaçant k par une variable réelle, il vient que l'on peut poser, avec S une constante :

$$S = S(r) = n(r) \sin(i(r)) \tag{30}$$

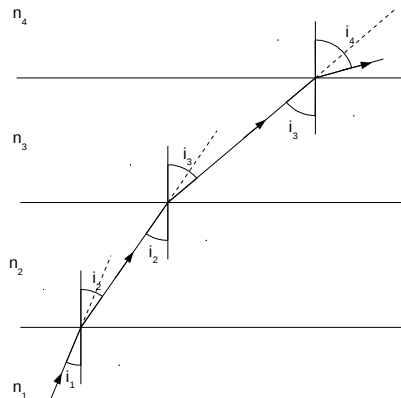


FIGURE 13 – Application des lois de Snell

Lemme de la dérivée Comme la trajectoire du rayon reste dans un plan, elle peut être vue comme une courbe dans un repère cartésien où l'on note z les abscisses et r les ordonnées (figure 12). En s'intéressant à la petite variation de z notée dz , on voit (figure 14) que l'on a $\cot(\frac{\pi}{2} - i(r)) = \frac{dr}{dz}$, où dr est la petite variation de r . On a donc :

$$\cot(i(r)) = \frac{dz}{dr} \tag{31}$$

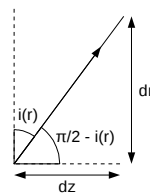


FIGURE 14 – Illustration du lemme de la dérivée

Lemme trigonométrique On calcule :

$$1 + \cot^2(i(r)) = 1 + \frac{\cos^2(i(r))}{\sin^2(i(r))} = \frac{\sin^2(i(r)) + \cos^2(i(r))}{\sin^2(i(r))} = \frac{1}{\sin^2(i(r))} \quad (32)$$

Lemme du développement limité On a pour u au voisinage de zéro :

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u) \quad (33)$$

Lemme de dérivation On a :

$$\frac{du^2}{dz} = \frac{du^2}{du} \frac{du}{dz} = 2u \frac{du}{dz} \quad (34)$$

Détermination de l'équation différentielle Par application des lemmes précédents, il vient :

$$1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n(r)^2}{S^2} \quad (35)$$

En notant α_0 l'angle du rayon incident et α_1 l'angle du rayon réfracté lors du dioptre air/verre pour l'entrée dans la fibre, mesuré par rapport à une normale horizontale et non verticale (voir figure 12), en notant n_{air} l'indice de réfraction de l'air, et n_1 celui de la fibre au point d'entrée du rayon, on peut poser, par application des lois de Snell, l'égalité :

$$n_{air} \sin(\alpha_0) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i(r=0)\right) = n_1 \cos(i(0)) \quad (36)$$

On obtient donc :

$$S = n_1 \sin(i(0)) = n_1 \sqrt{1 - \cos^2(i(0))} = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_{air}^2 \sin^2(\alpha_0)}{n_1^2}} \quad (37)$$

Il vient donc par injection dans l'équation 35 :

$$1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n(r)^2}{n_1^2 - n_{air}^2 \sin^2(\alpha_0)} \quad (38)$$

Par ailleurs, l'expression de $n(r)$ donne :

$$n(r)^2 = n_1^2 \left(1 - \Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^2 \quad (39)$$

L'application du lemme du développement limité donne :

$$n(r)^2 = n_1^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) + o(\Delta) \quad (40)$$

En injectant dans l'équation 38, il vient donc :

$$1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n_1^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)}{n_1^2 - n_{air}^2 \sin^2(\alpha_0)} \quad (41)$$

Pour simplifier l'écriture, on pose $\frac{1}{\delta^2} = \frac{2n_1^2 \Delta}{a^2(n_1^2 - n_{air}^2 \sin^2(\alpha_0))}$. On peut donc écrire l'équation 41 sous la forme :

$$1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_{air}^2 \sin^2(\alpha_0)} - \frac{r^2}{\delta^2} \quad (42)$$

Dérivons cette équation par rapport à z . On obtient, par application du lemme de dérivation :

$$2 \frac{dr}{dz} \frac{d^2r}{dz^2} = 2r \frac{dr}{dz} \frac{1}{\delta^2} \quad (43)$$

Regroupons les termes de l'équation dans le second membre, simplifions par 2, et factorisons. Il vient :

$$\frac{dr}{dz} \left(\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{r}{\delta^2} \right) = 0 \quad (44)$$

Si on a $\frac{dr}{dz} = 0$ pour tout r , cela signifie que r est constante, et le rayon suit donc une trajectoire horizontale rectiligne. Ce cas correspond à $\alpha_0 = 0$. Si $\frac{dr}{dz}$ n'est pas nul, nous pouvons simplifier et nous obtenons l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{r}{\delta^2} = 0 \quad (45)$$

Résolution de l'équation différentielle On considère le polynôme caractéristique $p^2 + \frac{1}{\delta^2} = 0$ dont les racines sont de manière évidente $\frac{i}{\delta}$ et $-\frac{i}{\delta}$. Les solutions de l'équation différentielle 45 sont donc de la forme (avec A, B, C, D des constantes réelles) :

$$r(z) = Ae^{i\frac{z}{\delta}} + Be^{-i\frac{z}{\delta}} = C \cos\left(\frac{z}{\delta}\right) + D \sin\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (46)$$

Identification des constantes d'intégration par application des conditions initiales On a $r(0) = 0$ car l'origine du repère cartésien correspond au point d'entrée du rayon lumineux dans la fibre, d'où $C = 0$ de manière immédiate. Par ailleurs, on a par application du lemme de la dérivée :

$$\left[\frac{dr}{dz} \right]_0 = \tan(\alpha_1) = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_1)}} = \frac{n_{air} \sin(\alpha_0)}{\sqrt{n_1^2 - n_{air}^2 \sin^2(\alpha_0)}} \quad (47)$$

Par dérivation de $r(z)$ obtenu précédemment, nous trouvons également :

$$\left[\frac{dr}{dz} \right]_0 = \frac{D}{\delta} \quad (48)$$

En appliquant un produit en croix et en remplaçant dans la relation 46, nous obtenons *in fine* :

$$r(z) = \frac{\delta n_{air} \sin(\alpha_0)}{\sqrt{n_1^2 - n_{air}^2 \sin^2(\alpha_0)}} \sin\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (49)$$